

유형의 완성 RPM

공통수학 2

정답및풀이



01 평면좌표

교과서 문제 정복하기

본책 007쪽

0001 $\overline{AB} = |7-3| = 4$

답 4

0002 $\overline{AB} = |8-(-2)| = 10$

답 10

0003 $\overline{AB} = |-9-(-5)| = 4$

답 4

0004 점 R의 좌표를 x 라 하면 $|x-4| = 3$ 에서

$$x-4 = \pm 3 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=7$$

$$\therefore R(1) \text{ 또는 } R(7)$$

답 1, 7

0005 점 S의 좌표를 x 라 하면 $|x-(-5)| = 5$ 에서

$$x+5 = \pm 5 \quad \therefore x=-10 \text{ 또는 } x=0$$

$$\therefore S(-10) \text{ 또는 } S(0)$$

답 -10, 0

0006 $\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + \{5-(-1)\}^2} = \sqrt{37}$

답 $\sqrt{37}$

0007 $\overline{AB} = \sqrt{\{1-(-4)\}^2 + \{-7-(-2)\}^2}$
 $= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

답 $5\sqrt{2}$

0008 $\overline{OA} = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

답 $\sqrt{41}$

0009 $\overline{AB} = \sqrt{(-a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

답 $\sqrt{a^2 + b^2}$

0010 (1) $P\left(\frac{1 \times (-2) + 3 \times 10}{1+3}\right)$, 즉 $P(7)$

(2) $M\left(\frac{10+(-2)}{2}\right)$, 즉 $M(4)$

답 (1) 7 (2) 4

0011 선분 AB의 중점의 좌표가 1이므로

$$\frac{-3+a}{2} = 1 \quad \therefore a=5$$

답 5

0012 (1) $P\left(\frac{3 \times 5 + 2 \times (-1)}{3+2}, \frac{3 \times (-3) + 2 \times 2}{3+2}\right)$,

$$\text{즉 } P\left(\frac{13}{5}, -1\right)$$

(2) $Q\left(\frac{3 \times (-1) + 2 \times 5}{3+2}, \frac{3 \times 2 + 2 \times (-3)}{3+2}\right)$, 즉 $Q\left(\frac{7}{5}, 0\right)$

(3) $M\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right)$, 즉 $M\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

답 (1) $\left(\frac{13}{5}, -1\right)$ (2) $\left(\frac{7}{5}, 0\right)$ (3) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

002 정답 및 풀이

0013 선분 AB의 중점의 좌표가 (2, 1)이므로

$$\frac{a+(-2)}{2} = 2, \frac{4+b}{2} = 1$$

따라서 $a=6, b=-2$ 이므로

$$ab = -12$$

답 -12

0014 $G\left(\frac{1+2+(-6)}{3}, \frac{2+(-1)+2}{3}\right)$, 즉 $G(-1, 1)$

답 (-1, 1)

0015 $G\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{2+1+(-3)}{3}\right)$, 즉 $G(2, 0)$

답 (2, 0)

0016 $G\left(\frac{0+a+(-a)}{3}, \frac{0+b+2b}{3}\right)$, 즉 $G(0, b)$

답 (0, b)

0017 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (3, -1)이므로

$$\frac{5+2+b}{3} = 3, \frac{a+3+(-1)}{3} = -1$$

따라서 $a=-5, b=2$ 이므로

$$a+b = -3$$

답 -3

유형 익히기

• 본책 008~014쪽

0018 $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(a-4)^2 + (4-a)^2} = 5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하면

$$2a^2 - 16a + 32 = 50, \quad a^2 - 8a - 9 = 0$$

$$(a+1)(a-9) = 0$$

$$\therefore a=9 \quad (\because a>0)$$

답 9

0019 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$$\sqrt{(a+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (1-3)^2}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 2a + 2 = a^2 - 4a + 8$$

$$\therefore a=1$$

답 ①

0020 $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ 이므로

$$\sqrt{(7-3)^2 + (-1-a)^2} = 2\sqrt{(-1+a)^2 + (2-4)^2}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 2a + 17 = 4a^2 - 8a + 20$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0, \quad (3a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1$$

답 1

$$\begin{aligned} 0021 \quad \overline{AB} &= \sqrt{(1-a)^2 + (a+5)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 + 8a + 26} \\ &= \sqrt{2(a+2)^2 + 18} \end{aligned}$$

따라서 $a = -2$ 일 때, 선분 AB의 길이가 최소가 된다. **답 -2**

0022 점 P(a, b)가 직선 $y = 2x - 7$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (a-1)^2 + (b-3)^2 &= (a-5)^2 + (b+1)^2 \\ a^2 - 2a + b^2 - 6b + 10 &= a^2 - 10a + b^2 + 2b + 26 \\ 8a - 8b &= 16 \\ \therefore a - b &= 2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 5, b = 3$

$$\therefore a + b = 8 \quad \text{답 8}$$

0023 P(a, 0)이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (a-2)^2 + (-1)^2 &= (a+1)^2 + (-4)^2 \\ a^2 - 4a + 5 &= a^2 + 2a + 17 \\ -6a &= 12 \quad \therefore a = -2 \\ \therefore P &(-2, 0) \end{aligned}$$

Q(0, b)라 하면 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (-2)^2 + (b-1)^2 &= 1^2 + (b-4)^2 \\ b^2 - 2b + 5 &= b^2 - 8b + 17 \\ 6b &= 12 \quad \therefore b = 2 \\ \therefore Q &(0, 2) \\ \therefore \overline{PQ} &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

0024 P(a, b)라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (a-8)^2 + (b-4)^2 &= (a-3)^2 + (b+1)^2 \\ a^2 - 16a + b^2 - 8b + 80 &= a^2 - 6a + b^2 + 2b + 10 \\ -10a - 10b &= -70 \\ \therefore a + b &= 7 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (a-3)^2 + (b+1)^2 &= (a-6)^2 + (b-8)^2 \\ a^2 - 6a + b^2 + 2b + 10 &= a^2 - 12a + b^2 - 16b + 100 \\ 6a + 18b &= 90 \\ \therefore a + 3b &= 15 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

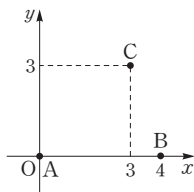
①, ②를 연립하여 풀면 $a = 3, b = 4$

따라서 점 P의 좌표는 (3, 4) **답 (3, 4)**

0025 오른쪽 그림과 같이 학교 A가 원점, 학교 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면

A(0, 0), B(4, 0), C(3, 3)

으로 놓을 수 있다.



도서관을 지으려는 지점을 P(a, b)라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a-4)^2 + b^2, \quad a^2 + b^2 = a^2 - 8a + 16 + b^2 \\ 8a &= 16 \quad \therefore a = 2 \end{aligned}$$

$\overline{PA} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a-3)^2 + (b-3)^2 \\ a^2 + b^2 &= a^2 - 6a + b^2 - 6b + 18, \quad 6b = -6a + 18 \\ \therefore b &= -a + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①에 $a = 2$ 를 대입하면 $b = 1$

즉 P(2, 1)이므로

$$\overline{PA} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 거리는 $\sqrt{5}$ km이다. **답 $\sqrt{5}$ km**

$$0026 \quad \overline{AB}^2 = (-4)^2 + (-4-2)^2 = 52,$$

$$\overline{BC}^2 = (-2)^2 + (-2+4)^2 = 8,$$

$$\overline{CA}^2 = (4+2)^2 + (2+2)^2 = 52$$

$$\text{이므로 } \overline{AB}^2 = \overline{CA}^2$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CA}$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

답 ⑤

$$0027 \quad \overline{AB}^2 = 1^2 + (-2-1)^2 = 10$$

$$\overline{BC}^2 = (3-1)^2 + (2+2)^2 = 20$$

$$\overline{CA}^2 = (-3)^2 + (1-2)^2 = 10 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이고 $\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2$ 에서 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 인 직각이등변삼각형이다. ... 2단계

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 5 \end{aligned}$$

... 3단계

답 5

	채점 요소	비율
1단계	$\overline{AB}^2, \overline{BC}^2, \overline{CA}^2$ 의 값 구하기	30 %
2단계	삼각형 ABC가 직각이등변삼각형을 알기	50 %
3단계	삼각형 ABC의 넓이 구하기	20 %

$$0028 \quad \overline{AB}^2 = (8-a)^2 + (3+1)^2 = a^2 - 16a + 80$$

$$\overline{BC}^2 = (2-8)^2 + (1-3)^2 = 40$$

$$\overline{CA}^2 = (a-2)^2 + (-1-1)^2 = a^2 - 4a + 8$$

삼각형 ABC가 $\angle A > 90^\circ$ 인 둔각삼각형이 되려면

$$\overline{BC}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$$

이어야 하므로

$$\begin{aligned} 40 &> (a^2 - 16a + 80) + (a^2 - 4a + 8) \\ a^2 - 10a + 24 &< 0, \quad (a-4)(a-6) < 0 \\ \therefore 4 &< a < 6 \end{aligned}$$

답 $4 < a < 6$

0029 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

제4사분면 위의 점 C의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b < 0$)라 하면

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(-2-2)^2 + (-4-4)^2 = (a+2)^2 + (b+4)^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 + 4a + 8b - 60 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BC} = \overline{CA} \text{에서 } \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{이므로}$$

$$(a+2)^2 + (b+4)^2 = (2-a)^2 + (4-b)^2$$

$$a^2 + 4a + b^2 + 8b + 20 = a^2 - 4a + b^2 - 8b + 20$$

$$8a = -16b \quad \therefore a = -2b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 4b^2 + b^2 - 8b + 8b - 60 = 0$$

$$b^2 = 12 \quad \therefore b = -2\sqrt{3} \quad (\because b < 0)$$

$$b = -2\sqrt{3} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a = 4\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 꼭짓점 C의 좌표는 } (4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

답 $(4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

0030 $O(0, 0), A(x, y), B(2, -1)$ 이라 하면

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \overline{OA}, \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \overline{AB}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

$$= \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$\geq \overline{OB}$$

$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다. **답** $\sqrt{5}$

참고 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 값이 최소인 경우는 점 A가 $\overline{OB}$ 위에 있을 때이다.

0031 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때이므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} \geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{(3+2)^2 + (8+4)^2} = 13$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다. **답** 4

$$\textbf{0032} \quad \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$$

이때 $A(1, -3), B(x, y), C(-4, 2)$ 라 하면

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = \overline{AB}, \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \overline{BC}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\geq \overline{AC}$$

$$= \sqrt{(-4-1)^2 + (2+3)^2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다. **답** $5\sqrt{2}$

0033 $P(a, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a-1)^2 + (-4)^2 + (a-5)^2 + (-3)^2$$

$$= 2a^2 - 12a + 51$$

$$= 2(a-3)^2 + 33$$

따라서 $a=3$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 33이다. **답** 3

0034 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (a-4)^2 + (b-2)^2 + (a-2)^2 + (b-6)^2$$

$$= 2a^2 - 12a + 2b^2 - 16b + 60$$

$$= 2(a-3)^2 + 2(b-4)^2 + 10$$

이때 a, b 가 실수이므로 $(a-3)^2 \geq 0, (b-4)^2 \geq 0$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \geq 10$$

따라서 $a=3, b=4$ 일 때 주어진 식이 최솟값을 가지므로 구하는

점 P의 좌표는 $(3, 4)$ **답** 4

0035 $P(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (-4)^2 + (a+2)^2 + (-k)^2 + (a-6)^2$$

$$= 2a^2 - 8a + 56 + k^2$$

$$= 2(a-2)^2 + 48 + k^2$$

따라서 $a=2$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 $48 + k^2$ 이므로

$$48 + k^2 = 57, \quad k^2 = 9$$

$$\therefore k=3 \quad (\because k > 0) \quad \textbf{답} \quad \textcircled{3}$$

0036 점 P가 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로 $P(a, a+3)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

momo2000@hanmail.net

$$= (a-1)^2 + (a-5)^2 + (a+3)^2 + (a-2)^2$$

$$+ (a-2)^2 + (a+4)^2$$

$$= 6a^2 - 6a + 59 = 6\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{115}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 주어진 식이 최솟값을 가지므로 구하는 점 P

의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ **답** $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

0037 점 M이 선분 BC의 중점이므로 $B\left(\frac{a+b}{2}, c\right), C\left(\frac{a+b}{2}, d\right)$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-d)^2 + b^2\}$$

$$= (a^2 + 2ac + c^2 + b^2) + (a^2 - 2ad + d^2 + b^2)$$

$$= 2\left(\frac{a+b}{2} a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = (a^2 + b^2) + c^2$$

$$= \left(\frac{a+b}{2} a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

$$\textbf{답} \quad \textcircled{a} - c \quad \textcircled{b} a^2 + b^2 + c^2$$

0038 직사각형 ABCD에서 $A(0, b), C(a, 0)$ 이므로

$$D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \{x^2 + (y-b)^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\}$$

$$= \left(\frac{a}{2} x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2\right)$$

$$\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 = (x^2 + y^2) + \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}$$

$$= \left(\frac{a}{2} x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2\right)$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$$

$$\textbf{답} \quad \textcircled{a} a \quad \textcircled{b} b \quad \textcircled{c} x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2$$

0039 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + 3 \times 4}{2+3}, \frac{2 \times 2 + 3 \times (-3)}{2+3} \right), \text{ 즉 } (2, -1)$$

점 M의 좌표는

$$\left(\frac{4 + (-1)}{2}, \frac{-3 + 2}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \overline{PM} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 2 \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0040 선분 AB를 5 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 10 + 3 \times 2}{5+3}, \frac{5 \times m + 3 \times 15}{5+3} \right), \text{ 즉 } \left(7, \frac{5m+45}{8} \right)$$

이 점이 점 (n, -5)와 일치하므로

$$7 = n, \frac{5m+45}{8} = -5$$

$$\therefore m = -17, n = 7$$

$$\therefore m+n = -10 \quad \text{답 } -10$$

0041 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (b+1) + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times (a+1)}{2+1} \right),$$

$$\text{ 즉 } \left(\frac{2b+4}{3}, \frac{a-1}{3} \right)$$

이 점이 점 (2, 1)과 일치하므로

$$\frac{2b+4}{3} = 2, \frac{a-1}{3} = 1$$

$$\therefore a=4, b=1 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 두 점 B(2, -1), C(3, 2)에 대하여 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표가 (p, q)이므로

$$p = \frac{1 \times 3 + 2 \times 2}{1+2} = \frac{7}{3}, q = \frac{1 \times 2 + 2 \times (-1)}{1+2} = 0$$

... 2단계

$$\therefore p-q = \frac{7}{3}$$

... 3단계

$$\text{답 } \frac{7}{3}$$

	채점 요소	비율
1단계	a, b의 값 구하기	50 %
2단계	p, q의 값 구하기	40 %
3단계	p-q의 값 구하기	10 %

0042 B⊙C는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 B⊙C의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times (-4) + 2 \times (-1)}{1+2} \right), \text{ 즉 } (4, -2)$$

따라서 A⊙(B⊙C)는 두 점 (-5, 4), (4, -2)를 이은 선분을 1 : 2로 내분하는 점이므로 A⊙(B⊙C)의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 + 2 \times (-5)}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 4}{1+2} \right), \text{ 즉 } (-2, 2)$$

$$\text{답 } (-2, 2)$$

0043 선분 AB를 k : (2-k)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k \times (-4) + (2-k) \times 1}{k + (2-k)}, \frac{k \times 6 + (2-k) \times (-3)}{k + (2-k)} \right),$$

$$\text{ 즉 } \left(\frac{2-5k}{2}, \frac{9k-6}{2} \right)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$\frac{2-5k}{2} < 0, \frac{9k-6}{2} > 0$$

$$\frac{2-5k}{2} < 0 \text{에서 } k > \frac{2}{5} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\frac{9k-6}{2} > 0 \text{에서 } k > \frac{2}{3} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

한편 k > 0, 2-k > 0이므로

$$0 < k < 2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분은

$$\frac{2}{3} < k < 2 \quad \text{답 } \frac{2}{3} < k < 2$$

0044 선분 AB를 (4-t) : t로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(4-t) \times 1 + t \times 4}{(4-t) + t}, \frac{(4-t) \times a + t \times (-3)}{(4-t) + t} \right),$$

$$\text{ 즉 } \left(\frac{3t+4}{4}, \frac{-(a+3)t+4a}{4} \right)$$

이 점이 점 (2, 3)과 일치하므로

$$\frac{3t+4}{4} = 2, \frac{-(a+3)t+4a}{4} = 3$$

$$\frac{3t+4}{4} = 2 \text{에서 } 3t+4=8$$

$$\therefore t = \frac{4}{3}$$

$$\frac{-(a+3)t+4a}{4} = 3 \text{에서 } -(a+3)t+4a=12$$

$$-\frac{4}{3}(a+3)+4a=12, \quad -4a-12+12a=36$$

$$8a=48 \quad \therefore a=6 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0045 선분 AB를 m : n으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 5 + n \times (-6)}{m+n}, \frac{m \times (-6) + n \times 4}{m+n} \right),$$

$$\text{ 즉 } \left(\frac{5m-6n}{m+n}, \frac{-6m+4n}{m+n} \right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{5m-6n}{m+n} = 0, \quad 5m=6n$$

$$\therefore m : n = 6 : 5$$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로 m=6, n=5

$$\therefore m-n=1 \quad \text{답 } 1$$

0046 선분 AB를 k : 5로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k \times 2 + 5 \times (-1)}{k+5}, \frac{k \times 4 + 5 \times 1}{k+5} \right),$$

$$\text{ 즉 } \left(\frac{2k-5}{k+5}, \frac{4k+5}{k+5} \right)$$

이 점이 직선 $y = -x + 1$ 위에 있으므로

$$\frac{4k+5}{k+5} = -\frac{2k-5}{k+5} + 1$$

$$4k+5 = -2k+5+k+5, \quad 5k=5$$

$$\therefore k=1$$

답 1

0047 $3\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$$

이때 $a > 0$ 에서 세 점 A, B, C의 위치는 오른쪽 그림과 같으므로 점 B는 선분 AC를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

$$\text{따라서 } \frac{2 \times a + 3 \times (-1)}{2+3} = 5, \quad \frac{2 \times b + 3 \times 0}{2+3} = 2 \text{이므로}$$

$$2a - 3 = 25, \quad 2b = 10$$

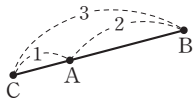
$$\therefore a = 14, \quad b = 5$$

$$\therefore a + b = 19$$

답 5

RPM비법노트

세 점 A, B, C의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때에도 $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$ 이지만 $a < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.



0048 $2\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$$

이때 점 C의 좌표를 (a, b) 라 하자.

(i) 점 B가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점인 경우

$$\frac{1 \times a + 2 \times (-1)}{1+2} = 1,$$

$$\frac{1 \times b + 2 \times 2}{1+2} = 4 \text{이므로}$$

$$a - 2 = 3, \quad b + 4 = 12 \quad \therefore a = 5, \quad b = 8$$

$$\therefore C(5, 8)$$

(ii) 점 A가 선분 BC의 중점인 경우

$$\frac{a+1}{2} = -1, \quad \frac{b+4}{2} = 2 \text{이므로}$$

$$a = -3, \quad b = 0$$

$$\therefore C(-3, 0)$$

(i), (ii)에서 $C(-3, 0)$ 또는 $C(5, 8)$

답 2, 4

0049 $\overline{AB} = 3\overline{BC}$ 에서

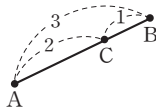
$$\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$$

(i) 점 C가 선분 AB 위에 있는 경우

점 C는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-5)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2+1} \right),$$

$$\text{즉 } (-1, 2)$$



(ii) 점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있는 경우

점 B는 선분 AC를 3 : 1로 내분하는

점이므로 점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{3 \times a + 1 \times (-5)}{3+1} = 1,$$

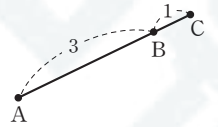
$$\frac{3 \times b + 1 \times 0}{3+1} = 3$$

$$3a - 5 = 4, \quad 3b = 12 \quad \therefore a = 3, \quad b = 4$$

$$\therefore C(3, 4)$$

(i), (ii)에서 $C(-1, 2)$ 또는 $C(3, 4)$

답 (-1, 2), (3, 4)



0050 D(a, b)라 하면 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+3}{2} = \frac{0+a}{2}, \quad \frac{3+2}{2} = \frac{0+b}{2}$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 5$$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 (2, 5)이다.

답 (2, 5)

0051 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1-3}{2}, \quad \frac{4+2}{2} = \frac{1+c}{2}$$

$$\therefore a+b = -2, \quad c = 5$$

$$\therefore a+b+c = 3$$

답 3

0052 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하고 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{c+d}{2}, \frac{3-5}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{c+d}{2}, -1 \right)$$

이 점이 직선 $y = -x$ 위에 있으므로

$$-1 = -\frac{c+d}{2} \quad \therefore c+d = 2$$

또 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-2}{2}, \frac{b-4}{2} \right)$ 이고, 이 점은

대각선 BD의 중점 (1, -1)과 일치하므로

$$\frac{a-2}{2} = 1, \quad \frac{b-4}{2} = -1 \quad \therefore a = 4, \quad b = 2$$

$$\therefore ab+c+d = 10$$

답 5

0053 마름모 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+4}{2} = \frac{2+b}{2} \quad \therefore b = a+2 \quad \dots\dots ①$$

또 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로

$$\sqrt{(2-a)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 3$$

$\dots\dots ②$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a=1, b=3$ 또는 $a=3, b=5$

$$\therefore ab=3 \text{ 또는 } ab=15$$

따라서 ab 의 값이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

0054 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (6, 8)이므로

$$\frac{2+x_1+x_2}{3}=6, \frac{4+y_1+y_2}{3}=8$$

$$\therefore x_1+x_2=16, y_1+y_2=20$$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), \text{ 즉 } (8, 10)$$

답 ②

다른 풀이 BC의 중점을 M(m, n)이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 AM을 2:1로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times m + 1 \times 2}{2+1}=6, \frac{2 \times n + 1 \times 4}{2+1}=8$$

$$2m+2=18, 2n+4=24 \quad \therefore m=8, n=10$$

따라서 BC의 중점의 좌표는 (8, 10)이다.

0055 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (1, -2)이므로

$$\frac{a+b-2}{3}=1 \text{ 에서 } a=b+5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{b+4+5}{3}=-2 \text{ 에서 } b=-15$$

$$b=-15 \text{ 를 } ㉠ \text{ 에 대입하면 } a=-10$$

$$\therefore a+b=-25$$

답 ②

0056 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+4-6}{3}, \frac{a+4-1}{3}\right), \text{ 즉 } \left(-1, \frac{a+3}{3}\right)$$

따라서 직선 $y=-4x$ 가 점 $\left(-1, \frac{a+3}{3}\right)$ 을 지나므로

$$\frac{a+3}{3}=4 \quad \therefore a=9$$

답 ⑤

$$\mathbf{0057} \quad \overline{AB}^2 = (-1-3)^2 + (4-2)^2 = 20$$

$$\overline{BC}^2 = 1^2 + (k-4)^2 = k^2 - 8k + 17$$

$$\overline{CA}^2 = 3^2 + (2-k)^2 = k^2 - 4k + 13$$

... 1단계

삼각형 ABC가 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$k^2 - 4k + 13 = 20 + k^2 - 8k + 17, \quad 4k = 24$$

$$\therefore k=6$$

... 2단계

따라서 C(0, 6)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3-1+0}{3}, \frac{2+4+6}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{2}{3}, 4\right)$$

... 3단계

답 $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$

	채점 요소	비율
1단계	$\overline{AB}^2, \overline{BC}^2, \overline{CA}^2$ 의 값 구하기	30%
2단계	k 의 값 구하기	40%
3단계	삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 구하기	30%

0058 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 같으므로 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+1+4}{3}, \frac{3-4+7}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

따라서 $a=1, b=2$ 이므로

$$a-b=-1$$

답 ②

다른 풀이 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-2)}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times 3}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 7 + 1 \times (-4)}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(3, \frac{10}{3}\right)$$

점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-2) + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 7}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(0, \frac{13}{3}\right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+3+0}{3}, \frac{-\frac{5}{3} + \frac{10}{3} + \frac{13}{3}}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

0059 $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점의 좌표를 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 이라 하고, $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \\ & \quad + (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 \\ &= 3x^2 - 2(x_1+x_2+x_3)x + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ & \quad + 3y^2 - 2(y_1+y_2+y_3)y + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ &= 3\left(x - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2 \\ & \quad + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3} \\ & \quad - \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} - \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3} \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소이고, 이때의 점 P는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

답 ③

0060 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4-1)^2 + (-8-4)^2} = 13,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = 5$$

이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 5$$

즉 점 D는 $\overline{BC}$ 를 13:5로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13 \times 5 + 5 \times (-4)}{13+5}, \frac{13 \times 1 + 5 \times (-8)}{13+5}\right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

답 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

0061 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-5)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-5)^2 + (7-4)^2} = 3\sqrt{2}$$

이므로

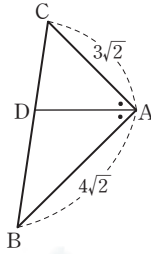
$$\overline{BD} : \overline{CD} = 4\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 4 : 3$$

$$\therefore \triangle DAB : \triangle DAC = \overline{BD} : \overline{CD} = 4 : 3$$

따라서 $p=4$, $q=3$ 이므로

$$p^2 - q^2 = 7$$

답 7



0062 $\overline{BD}$ 는 $\angle B$ 의 이등분선이

므로

$$\overline{AD} : \overline{CD} = \overline{BA} : \overline{BC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(6+2)^2 + (9-3)^2} = 10,$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(10-6)^2 + (6-9)^2} = 5$$

이므로

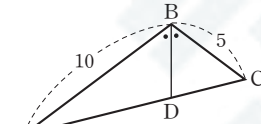
$$\overline{AD} : \overline{CD} = 10 : 5 = 2 : 1$$

따라서 점 D는 $\overline{AC}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$a = \frac{2 \times 10 + 1 \times (-2)}{2+1} = 6, b = \frac{2 \times 6 + 1 \times 3}{2+1} = 5$$

$$\therefore a - b = 1$$

답 ①



0063 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 이므로

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 - \{(x-2)^2 + (y-4)^2\} = 9$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 - (x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20) = 9$$

$$6x + 4y - 24 = 0$$

$$\therefore 3x + 2y - 12 = 0$$

$$\text{답 } 3x + 2y - 12 = 0$$

0064 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 10y + 26 = x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13$$

$$\therefore 6x - 4y + 13 = 0$$

$$\text{답 } 6x - 4y + 13 = 0$$

0065 $A(a, b)$ 라 하고, $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2+1}, y = \frac{2 \times 2 + 1 \times b}{2+1}$$

$$\therefore a = 3x - 6, b = 3y - 4$$

..... ㉠

이때 점 A는 직선 $y = 3x + 2$ 위의 점이므로

$$b = 3a + 2$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3y - 4 = 3(3x - 6) + 2, \quad -9x + 3y + 12 = 0$$

$$\therefore 3x - y - 4 = 0$$

답 ⑤

시험에 꼭 나오는문제

0066 $\overline{AB} \leq 6$ 에서 $\overline{AB}^2 \leq 36$ 이므로

$$(t-2)^2 + (8-t)^2 \leq 36, \quad t^2 - 10t + 16 \leq 0$$

$$(t-2)(t-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq t \leq 8$$

따라서 정수 t 는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개이다.

답 ④

0067 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-3)^2 = (a+3)^2 + (b-5)^2$$

$$a^2 - 2a + b^2 - 6b + 10 = a^2 + 6a + b^2 - 10b + 34$$

$$-8a + 4b = 24 \quad \therefore 2a - b = -6 \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-3)^2 = (a+1)^2 + (b+1)^2$$

$$a^2 - 2a + b^2 - 6b + 10 = a^2 + 2a + b^2 + 2b + 2$$

$$-4a - 8b = -8 \quad \therefore a + 2b = 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 2$

$$\therefore a - b = -4$$

답 -4

0068 $\overline{AB}^2 = (2+1)^2 + (4+1)^2 = 34$

$$\overline{BC}^2 = (3-2)^2 + (-4)^2 = 17$$

$$\overline{CA}^2 = (-1-3)^2 + (-1)^2 = 17$$

따라서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$ 이고 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 에서 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle C = 90^\circ$ 이고 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 인 직각이등변삼각형이다.

답 ②

0069 $P(x, y)$, $A(-1, -2)$, $B(2, 2)$ 라 하면

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \overline{AP},$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \overline{BP}$$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$= \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{(2+1)^2 + (2+2)^2} = 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

답 ③

0070 $P(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (-1)^2 + (a+4)^2 + 1^2 + (a-3)^2$$

$$= 2a^2 + 2a + 27$$

$$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{53}{2}$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 주어진 식의 값이 최소이고 이때의 점 P의

좌표는 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

즉 점 $P\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 은 직선 $2x - 5y + k = 0$ 위의 점이므로

$$\frac{5}{2} + k = 0 \quad \therefore k = -\frac{5}{2}$$

답 $-\frac{5}{2}$

0071 $\overline{BD}=2\overline{CD}$ 이므로

$$B(\overline{7b}-2c, 0)$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2$$

$$\begin{aligned} &= \{(a+2c)^2 + b^2\} + 2\{(a-c)^2 + b^2\} \\ &= a^2 + 4ac + 4c^2 + b^2 + 2a^2 - 4ac + 2c^2 + 2b^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 &= (a^2 + b^2) + 2c^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2c^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2)$$

답 ④

0072 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 3 \times 8}{2+3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2+3}\right), \text{ 즉 } (6, -2)$$

점 P(6, -2)가 직선 $x-2y+k=0$ 위에 있으므로

$$6 - 2 \times (-2) + k = 0 \quad \text{momo2000@hanmail.net}$$

$$\therefore k = -10$$

답 -10

0073 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 이 만나

는 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(\alpha, \frac{1}{2}\alpha+1), (\beta, \frac{1}{2}\beta+1)$

($\alpha < \beta$)이라 하면 α, β 는 방정식

$$ax^2 = \frac{1}{2}x + 1, \text{ 즉 } 2ax^2 - x - 2 = 0$$

의 두 실근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2a}, \alpha\beta = -\frac{1}{a} \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $\overline{MH}=1$ 에서 선분 PQ의 중점 M의 x좌표가 1이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \quad \therefore \alpha + \beta = 2$$

$$㉠ \text{에서 } \alpha + \beta = \frac{1}{2a} = 2 \text{이므로}$$

$$4a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha\beta = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \left\{ \left(\frac{1}{2}\beta + 1 \right) - \left(\frac{1}{2}\alpha + 1 \right) \right\}^2}$$

$$= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\beta - \alpha)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{2^2 - 4 \times (-4)}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times 2\sqrt{5}$$

$$= 5$$

답 ③

0074 선분 AB를 1 : k로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + k \times (-2)}{1+k}, \frac{1 \times 7 + k \times 0}{1+k}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{-2k}{1+k}, \frac{7}{1+k}\right)$$

이 점이 직선 $x+2y=2$ 위에 있으므로

$$\frac{-2k}{1+k} + 2 \times \frac{7}{1+k} = 2$$

$$-2k + 14 = 2(1+k), \quad -4k = -12$$

$$\therefore k = 3$$

답 ③

0075 $4\overline{AC}=3\overline{BC}$ 에서 $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 4$

이를 만족시키는 세 점 A, B, C의 위치는 오

른쪽 그림과 같으므로 점 A는 선분 CB를

3 : 1로 내분하는 점이다.

$$\text{따라서 } \frac{3 \times 2 + 1 \times a}{3+1} = -1,$$

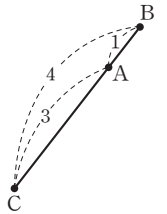
$$\frac{3 \times 4 + 1 \times b}{3+1} = -1 \text{이므로}$$

$$a + 6 = -4, \quad b + 12 = -4$$

$$\therefore a = -10, \quad b = -16$$

$$\therefore a + b = -26$$

답 -26



0076 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$4 = \frac{3+a}{2}, \quad 2 = \frac{5+b}{2}$$

$$\therefore a = 5, \quad b = -1$$

$$\therefore a + b = 4$$

답 4

0077 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

이때 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+ab}{2}, \frac{5+1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{ab}{2}, 3\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \text{ 즉 } \left(4, \frac{a+b}{2}\right)$$

따라서 두 점 $\left(\frac{ab}{2}, 3\right)$ 과 $\left(4, \frac{a+b}{2}\right)$ 가 일치하므로

$$\frac{ab}{2} = 4 \text{에서} \quad ab = 8$$

$$3 = \frac{a+b}{2} \text{에서} \quad a+b = 6$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= 6^3 - 3 \times 8 \times 6 = 72$$

답 ②

0078 B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)라 하면 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가

(4, 2)이므로

$$\frac{3+b_1}{2} = 4, \quad \frac{-2+b_2}{2} = 2$$

$$\therefore b_1 = 5, \quad b_2 = 6 \quad \therefore B(5, 6)$$

또 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ 이므로

$$\frac{3+5+c_1}{3} = \frac{4}{3}, \quad \frac{-2+6+c_2}{3} = 2$$

$$\therefore c_1 = -4, c_2 = 2 \quad \therefore C(-4, 2)$$

따라서 BC를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-4) + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times 6}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(-1, \frac{10}{3}\right)$$

$$\text{이므로 } a = -1, b = \frac{10}{3}$$

$$\therefore a+b = \frac{7}{3} \quad \text{답 } \frac{7}{3}$$

0079 $\angle ABC$ 의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로

$$\overline{BA} = \overline{BC}$$

$$\overline{BA} = \sqrt{(-3)^2 + (-a)^2} = \sqrt{9+a^2}, \quad \overline{BC} = |1 - (-3)| = 4$$

$$\text{이므로 } \sqrt{9+a^2} = 4$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 9+a^2=16, \quad a^2=7$$

$$\therefore a = \sqrt{7} \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } ③$$

0080 오른쪽 그림과 같이 윤서의 출발점의

위치를 원점, 주희의 출발점의 위치를 점

$(0, 10)$ 으로 하는 좌표평면을 잡자.

주희와 윤서의 위치를 나타내는 점을 각각 P,

Q라 하면 두 사람이 출발한 지 t 시간 후의 두

점 P, Q의 좌표는

$$P(0, 10-8t), Q(6t, 0) \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(6t)^2 + (-10+8t)^2}$$

$$= \sqrt{100t^2 - 160t + 100}$$

$$= \sqrt{100\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + 36} \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 PQ의 길이는 $t = \frac{4}{5}$ 일 때 최솟값 $\sqrt{36}$, 즉 6을 가지므로

주희와 윤서 사이의 거리의 최솟값은 6 km이다. $\dots \text{3단계}$

답 6 km

채점 요소	비율
1단계 주희와 윤서가 출발한 지 t 시간 후의 위치를 좌표로 나타내기	30 %
2단계 PQ의 길이를 t 에 대한 식으로 나타내기	50 %
3단계 주희와 윤서 사이의 거리의 최솟값 구하기	20 %

0081 삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$$

$$\overline{OA} = \overline{OB} \text{에서 } \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 \text{이므로}$$

$$2^2 + 2^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8 \quad \dots \text{①}$$

$$\overline{OA} = \overline{AB} \text{에서 } \overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 \text{이므로}$$

$$2^2 + 2^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 4(a+b) = 0 \quad \dots \text{②} \quad \dots \text{1단계}$$

①을 ②에 대입하면

$$8 - 4(a+b) = 0$$

$$a+b=2 \quad \therefore b=2-a \quad \dots \text{③}$$

③을 ①에 대입하면

$$a^2 + (2-a)^2 = 8, \quad 2a^2 - 4a + 4 = 8$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$\therefore a = 1 - \sqrt{3} \quad (\because a < 0)$$

$$a = 1 - \sqrt{3} \text{을 ③에 대입하면}$$

$$b = 1 + \sqrt{3} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore a-b = -2\sqrt{3} \quad \dots \text{3단계}$$

$$\text{답 } -2\sqrt{3}$$

채점 요소	비율
1단계 a, b 에 대한 식 세우기	40 %
2단계 a, b 의 값 구하기	50 %
3단계 $a-b$ 의 값 구하기	10 %

0082 $A = \frac{1 \times \sqrt{2} + 1 \times \sqrt{5}}{1+1}$ 이므로 A는 선분 PQ의 중점의

좌표이다.

$B = \frac{2 \times \sqrt{5} + 1 \times \sqrt{2}}{2+1}$ 이므로 B는 선분 PQ를 2:1로 내분하는

점의 좌표이다.

$C = \frac{1 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{2}}{1+3}$ 이므로 C는 선분 PQ를 1:3으로 내분하

는 점의 좌표이다. $\dots \text{1단계}$

따라서 세 수 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore C < A < B$$

$\dots \text{2단계}$

$$\text{답 } C < A < B$$

채점 요소	비율
1단계 세 수 A, B, C의 의미 파악하기	70 %
2단계 세 수 A, B, C의 대소 관계 구하기	30 %

0083 선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{t \times 5 + (1-t) \times 0}{t + (1-t)}, \frac{t \times (-3) + (1-t) \times 2}{t + (1-t)}\right),$$

$$\text{즉 } (5t, -5t+2)$$

$\dots \text{1단계}$

이때 점 P가 x 축 위의 점이므로

$$-5t+2=0 \quad \therefore t = \frac{2}{5}$$

$$\therefore P(2, 0)$$

$\dots \text{2단계}$

따라서 선분 OP를 $(1-2t) : 2t$ 로 내분하는 점의 x 좌표는

$$\frac{(1-2t) \times 2 + 2t \times 0}{(1-2t) + 2t} = 2-4t$$

$$= 2 - 4 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$\dots \text{3단계}$

$$\text{답 } \frac{2}{5}$$

채점 요소	비율
1단계 점 P의 좌표를 t 로 나타내기	40 %
2단계 점 P의 좌표 구하기	20 %
3단계 선분 OP를 $(1-2t) : 2t$ 로 내분하는 점의 x 좌표 구하기	40 %

0084 전략 삼각형의 외심의 성질을 이용하여 외심의 x 좌표와 y 좌표에 대한 식을 세운다.

$\triangle OAB$ 의 외심을 $P(p, q)$ 라 하면

$$\overline{OP} = \overline{AP} = \overline{BP}$$

$\overline{OP} = \overline{AP}$ 에서 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2$ 이므로

$$p^2 + q^2 = (p-4)^2 + (q-2)^2$$

$$p^2 + q^2 = p^2 - 8p + q^2 - 4q + 20$$

$$\therefore 2p + q = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\overline{OP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{OP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$p^2 + q^2 = (p-6)^2 + (q+2)^2$$

$$p^2 + q^2 = p^2 - 12p + q^2 + 4q + 40$$

$$\therefore 3p - q = 10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $p=3, q=-1$

즉 $P(3, -1)$ 이므로 $\overline{OP} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

따라서 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi \quad \text{답 } 10\pi$$

다른 풀이 $\overline{OA}^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

$$\overline{OB}^2 = 6^2 + (-2)^2 = 40$$

$$\overline{AB}^2 = (6-4)^2 + (-2-2)^2 = 20$$

$$\text{이므로 } \overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$

따라서 $\triangle OAB$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 $\triangle OAB$ 의 외심은 $\overline{OB}$ 의 중점이다.

즉 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

이므로 구하는 넓이는 $\pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi$

RPM 비법 노트

삼각형의 외심

- ① 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리는 모두 같다.
- ② 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.

0085 전략 소매상 A, B, C의 위치를 수직선 위의 좌표로 나타낸 후 도매상에서 각 소매상까지의 거리의 제곱의 합을 구한다.

소매상의 위치를 각각 $A(-2a), B(0), C(a)$ ($a > 0$), 도매상의 위치를 $P(x)$ 라 하면 도매상에서 각 소매상까지의 거리의 제곱의 합은

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x+2a)^2 + x^2 + (x-a)^2 \\ &= 3x^2 + 2ax + 5a^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + \frac{14}{3}a^2 \end{aligned}$$

즉 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값은 $x = -\frac{1}{3}a$ 일 때 최소이므로 이때 운반 비용도 최소가 된다.

$$x = -\frac{1}{3}a \text{이면}$$

$$\overline{AP} = \left| -\frac{1}{3}a - (-2a) \right| = \frac{5}{3}a,$$

$$\overline{BP} = \left| -\frac{1}{3}a \right| = \frac{1}{3}a$$

이므로 $\overline{AP} : \overline{BP} = 5 : 1$

따라서 도매상의 위치는 $\overline{AB}$ 를 5 : 1로 내분하는 점이다.

답 ④

$$\text{참고 } \overline{CP} = \left| a - \left(-\frac{1}{3}a\right) \right| = \frac{4}{3}a \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} : \overline{CP} = 5 : 4$$

따라서 도매상의 위치는 $\overline{AC}$ 를 5 : 4로 내분하는 점이라 할 수도 있다.

0086 전략 평행선 사이의 길이의 비를 이용하여 $\overline{BC}$ 와 $\overline{PC}$ 의 길이의 비를 구한다.

$\overline{AP} \parallel \overline{DC}$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{PB} : \overline{PC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + (-9-3)^2} = 13,$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PB} : \overline{PC} = 13 : 5$$

따라서 점 C는 $\overline{BP}$ 를 $(13-5) : 5$, 즉 8 : 5로 내분하는 점이다

$$\text{로 } \frac{8 \times a + 5 \times (-5)}{8+5} = 4, \frac{8 \times b + 5 \times (-9)}{8+5} = 0$$

$$8a - 25 = 52, 8b - 45 = 0$$

$$\therefore a = \frac{77}{8}, b = \frac{45}{8}$$

$$\therefore a - b = 4$$

답 ⑤

02 직선의 방정식

교과서 문제 정복하기

본책 019쪽

0087 $y = -5x + 3$

0088 $y - (-1) = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 3$

답 $y = 2x - 3$

0089 $y - 3 = \frac{-3-3}{4-2}(x-2) \quad \therefore y = -3x + 9$

답 $y = -3x + 9$

0090 $y = 4$

0091 $-\frac{x}{7} + \frac{y}{5} = 1$

0092 (1) $ax + by + c = 0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로

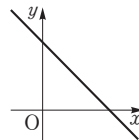
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$a > 0, b > 0, c < 0$ 이므로

(기울기) $= -\frac{a}{b} < 0$,

(y절편) $= -\frac{c}{b} > 0$

따라서 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

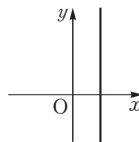


(2) $ax + by + c = 0$ 에서 $b = 0$ 이므로 $ax + c = 0$

$$\therefore x = -\frac{c}{a}$$

$a > 0, c < 0$ 이므로 $-\frac{c}{a} > 0$

따라서 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 4 사분면을 지난다.



답 (1) 제 1, 2, 4 사분면 (2) 제 1, 4 사분면

0093 주어진 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$4x + 5y + 3 = 0, 2x + 3y + 1 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x = -2, y = 1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2, 1)$ 이다.

답 $(-2, 1)$

0094 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$2x + y - 1 + k(x - 2y + 1) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x + y - 1 = 0, x - 2y + 1 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ 이다.

답 $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$

012 정답 및 풀이

0095 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$2x - 3y - 1 + k(2x - 4y + 1) = 0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

이라 하면 이 직선이 원점을 지나므로

$$-1 + k = 0 \quad \therefore k = 1$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2x - 3y - 1 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$\therefore 4x - 7y = 0$$

답 $4x - 7y = 0$

다른 풀이 $2x - 3y - 1 = 0, 2x - 4y + 1 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = \frac{7}{2}, y = 2$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표가 $(\frac{7}{2}, 2)$ 이므로 두 점 $(0, 0),$

$(\frac{7}{2}, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{2}{7}x \quad \therefore 4x - 7y = 0$$

0096 (1) $-\frac{1}{2} = a + 1 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$

(2) $-\frac{1}{2} \times (a + 1) = -1 \quad \therefore a = 1$

답 (1) $-\frac{3}{2}$ (2) 1

0097 (1) 두 직선이 평행하려면 $\frac{1}{a-1} = \frac{a}{2} \neq \frac{1}{1}$

$$\frac{1}{a-1} = \frac{a}{2} \text{에서 } a^2 - a = 2, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$\frac{a}{2} \neq \frac{1}{1} \text{에서 } a \neq 2 \text{이므로 } a = -1$$

(2) 두 직선이 수직이려면

$$1 \times (a-1) + a \times 2 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

답 (1) -1 (2) $\frac{1}{3}$

0098 직선 $3x + 2y + 1 = 0$, 즉 $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ 에 평행한 직

선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 이고 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-3) = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x$$

답 $y = -\frac{3}{2}x$

0099 직선 $y = -3x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이고 점 $(-2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{3}\{x - (-2)\}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

답 $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

0100 $\frac{|1 \times 1 - 2 \times 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

0101 $\frac{|6 \times (-3) + 8 \times 2 - 3|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0102 $\frac{|6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{5}$ 답 $\frac{6}{5}$

0103 평행한 두 직선 $x-y-3=0$, $x-y+3=0$ 사이의 거리는 직선 $x-y-3=0$ 위의 점 $(3, 0)$ 과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3-0+3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$
답 $3\sqrt{2}$

RPM비법노트

평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

유형 익히기

• 본책 020~027쪽

0104 두 점 $(-4, 2)$, $(6, 8)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는 $(\frac{-4+6}{2}, \frac{2+8}{2})$, 즉 $(1, 5)$

따라서 점 $(1, 5)$ 를 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y-5=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+7$$
답 $y=-2x+7$

0105 직선 $3x-y-5=0$, 즉 $y=3x-5$ 의 기울기는 3이므로 점 $(-1, -1)$ 을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=3\{x-(-1)\} \quad \therefore 3x-y+2=0$$

따라서 $a=3$, $b=2$ 이므로

$$ab=6$$
답 ⑤

0106 주어진 직선의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1$$

점 $(2, -1)$ 을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=x-2 \quad \therefore y=x-3$$

따라서 $m-2=1$, $-n-1=-3$ 이므로 $m=3$, $n=2$

$$\therefore m+n=5$$
답 5

0107 두 점 $A(6, -4)$, $B(1, 1)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$(\frac{2 \times 1 + 3 \times 6}{2+3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2+3}), \text{ 즉 } (4, -2)$$

따라서 두 점 $(4, -2)$, $(-1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-2)=\frac{3-(-2)}{-1-4}(x-4)$$

$$\therefore y=-x+2$$

즉 구하는 y 절편은 2이다. 답 2

0108 두 점 $(-2, 3)$, $(3, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-2-3}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=-x+1$$

직선 $y=-x+1$ 이 두 점 $(-5, a)$, $(b, 2)$ 를 지나므로

$$a=-(-5)+1, 2=-b+1$$

$$\therefore a=6, b=-1$$

$$\therefore a-b=7$$
답 ⑤

0109 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표는

$$(\frac{3+4-1}{3}, \frac{5+1+3}{3}), \text{ 즉 } (2, 3)$$

... 1단계

따라서 두 점 $C(-1, 3)$, $G(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=3$$

... 2단계

답 $y=3$

채점 요소		비율
1단계	삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표 구하기	50%
2단계	직선 CG 의 방정식 구하기	50%

다른 풀이 직선 CG 는 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나고 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$(\frac{3+4}{2}, \frac{5+1}{2}), \text{ 즉 } (\frac{7}{2}, 3)$$

따라서 두 점 $(-1, 3)$, $(\frac{7}{2}, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=3$$

0110 두 점 $A(5, -3)$, $C(1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-3)=\frac{5-(-3)}{1-5}(x-5)$$

$$\therefore y=-2x+7$$

..... ㉠

두 점 $O(0, 0)$, $B(7, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=0$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $x=\frac{7}{2}$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(\frac{7}{2}, 0)$ 이다. 답 $(\frac{7}{2}, 0)$

0111 x 절편과 y 절편의 합이 0이므로 x 절편을 a ($a \neq 0$)라 하면 y 절편은 $-a$ 이다.

따라서 주어진 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1 \quad \therefore y=x-a$$

이 직선이 점 $(-2, 4)$ 를 지나므로

$$4=-2-a \quad \therefore a=-6$$

답 -6

0112 $2x-3y-4=0$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$2x-4=0 \quad \therefore x=2$$

$3x+y+8=0$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$y+8=0 \quad \therefore y=-8$$

따라서 직선 l 의 x 절편은 2, y 절편은 -8 이므로 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-8} = 1$$

이 직선이 점 $(a, -4)$ 를 지나므로

$$\frac{a}{2} + \frac{-4}{-8} = 1, \quad \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a=1$$

답 1

0113 세 점 $A(1, 3)$, $B(a, 5)$, $C(3, 2a+3)$ 이 한 직선 위에 있으므로 직선 AB 와 직선 AC 의 기울기가 같다.

$$\therefore \frac{5-3}{a-1} = \frac{(2a+3)-3}{3-1} \text{이므로}$$

$$\frac{2}{a-1} = a, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

따라서 직선의 기울기가 $\frac{5-3}{2-1}=2$ 이고 점 $A(1, 3)$ 을 지나므로

구하는 직선의 방정식은

$$y-3=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x+1$$

답 $y=2x+1$

0114 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AC 의 기울기와 직선 BC 의 기울기가 같아야 한다.

$$\therefore \frac{7+1}{5-k} = \frac{7-k}{5-2} \text{이므로}$$

$$24 = (5-k)(7-k)$$

$$k^2 - 12k + 11 = 0, \quad (k-1)(k-11) = 0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=11$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$1+11=12$$

답 12

0115 꼭짓점 A 를 지나는 직선 $y=ax+b$ 가 삼각형 ABC 의 넓이를 이등분하려면 선분 BC 의 중점을 지나야 한다.

선분 BC 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{-5+1}{2}\right), \text{ 즉 } (2, -2)$$

두 점 $(3, 3)$, $(2, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{-2-3}{2-3}(x-3)$$

$$\therefore y=5x-12$$

따라서 $a=5$, $b=-12$ 이므로

$$a+b=-7$$

답 -7

0116 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ 과 x 축, y 축의 교

점을 각각 A , B 라 하면

$$A(2, 0), B(0, 4)$$

직선 $y=mx$ 가 삼각형 ABO 의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AB 의 중점을 지나야 한다.

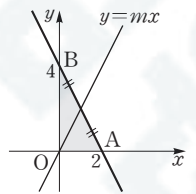
이때 선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

따라서 직선 $y=mx$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나야 하므로

$$m=2$$

답 ②



0117 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

오른쪽 그림과 같이 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 A , B 라 하면

점 A 의 좌표는

$$\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right), \text{ 즉 } (-2, -1)$$

점 B 의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 3)$$

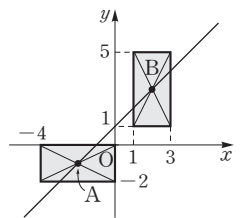
두 점 $A(-2, -1)$, $B(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1) = \frac{3-(-1)}{2-(-2)}\{x-(-2)\} \quad \therefore y=x+1$$

따라서 이 직선의 x 절편은 -1 , y 절편은 1 이므로 구하는 곱은

$$-1 \times 1 = -1$$

답 -1



0118 $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

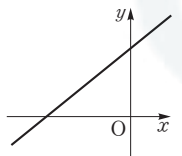
이때 $ab<0$, $bc<0$ 에서 $\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}<0$ 이므로

$$-\frac{a}{b}>0, \quad -\frac{c}{b}>0$$

즉 기울기와 y 절편이 모두 양수이므로 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 직선은 제 4사분면을 지나지 않는다.

답 ④



0119 $\neg$, $c=0$ 이면 $ax+by=0$

$$\therefore y=-\frac{a}{b}x (\because ab \neq 0)$$

따라서 주어진 직선은 원점을 지난다. (참)

$\therefore b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab>0$ 에서 $-\frac{a}{b}<0$ 이므로 직선의 기울기는 음수이다.

따라서 주어진 직선은 제 4사분면을 지난다. (참)

ㄷ. $b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

이때 $bc < 0$ 에서 $-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선의 y 절편은 양수이다.

따라서 주어진 직선은 제1사분면을 지난다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 옳다.

답 ⑤

0120 $ax+by-2=0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{2}{b}$

주어진 그림에서 이 직선의 기울기와 y 절편이 모두 음수이므로

$$-\frac{a}{b} < 0, \frac{2}{b} < 0 \quad \therefore a < 0, b < 0$$

$$x-ay+b=0 \text{에서} \quad y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$$

이때 $\frac{1}{a} < 0, \frac{b}{a} > 0$ 이므로 이 직선의 기울기는 음수, y 절편은 양수이다.

따라서 직선 $x-ay+b=0$ 의 개형은 ③이다.

답 ③

0121 $(2k+1)x - (k-1)y - 5k - 4 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x-y-5)k + x+y-4=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-y-5=0, x+y-4=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3, y=1$

$$\therefore P(3, 1)$$

따라서 기울기가 -2 이고 점 $P(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = -2(x-3)$$

$$\therefore 2x+y-7=0$$

답 ④

0122 $mx+y+3m-4=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x+3)+y-4=0$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+3=0, y-4=0$$

$$\therefore x=-3, y=4$$

즉 $P(-3, 4)$ 이므로

$$OP = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

답 5

0123 점 (a, b) 가 직선 $2x-y+3=0$ 위의 점이므로

$$2a-b+3=0 \quad \therefore b=2a+3$$

..... ㉠

㉠을 $2ax-3by=9$ 에 대입하면

$$2ax-3(2a+3)y=9$$

$$\therefore (2x-6y)a-9y-9=0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-6y=0, -9y-9=0$$

$$\therefore x=-3, y=-1$$

따라서 직선 $2ax-3by=9$ 는 항상 점 $(-3, -1)$ 을 지난다.

답 ②

0124 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$2x-3y-1+k(x+y-3)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ㉠$$

이라 하면 직선 ㉠이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$2-3-1+k(1+1-3)=0$$

$$-2-k=0 \quad \therefore k=-2$$

이것을 ㉠에 대입하면 $2x-3y-1-2(x+y-3)=0$

$$-5y+5=0 \quad \therefore y=1=0$$

따라서 $a=0, b=1$ 이므로 $a-b=-1$

답 -1

다른 풀이 $2x-3y-1=0, x+y-3=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표가 $(2, 1)$ 이므로 두 점 $(2, 1), (1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=1$$

0125 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y+1+k(2x-y-1)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ㉠$$

이라 하면 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$2+0+1+k(4-0-1)=0$$

$$3+3k=0 \quad \therefore k=-1$$

이것을 ㉠에 대입하면 $x+y+1-(2x-y-1)=0$

$$\therefore x-2y-2=0$$

⑤ $4-2 \times 1-2=0$ 이므로 점 $(4, 1)$ 은 직선 $x-2y-2=0$ 위의 점이다.

답 ⑤

0126 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$5x-y+2+k(x+4y-3)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하면 $(k+5)x+(4k-1)y-3k+2=0 \quad \dots\dots ㉠$

직선 ㉠의 기울기가 -1 이려면

$$-\frac{k+5}{4k-1} = -1, \quad k+5=4k-1 \quad \therefore k=2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$7x+7y-4=0 \quad \therefore y=-x+\frac{4}{7}$$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{4}{7}$ 이다.

답 $\frac{4}{7}$

0127 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$ax+(a+1)y+2+k\{(a-6)x+ay-2\}$$

$$=0 \quad (k \text{는 실수})$$

..... ㉠

이라 하면 직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$2-2k=0 \quad \therefore k=1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$ax+(a+1)y+2+(a-6)x+ay-2=0$$

$$\therefore (2a-6)x+(2a+1)y=0$$

이 직선의 기울기가 2이므로

$$-\frac{2a-6}{2a+1} = 2, \quad -2a+6=4a+2$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0128 두 직선이 평행하려면

$$\frac{2}{k+1} = \frac{-k}{-1} \neq \frac{1}{k}$$

$$\frac{2}{k+1} = \frac{-k}{-1} \text{에서} \quad -2 = -k^2 - k$$

$$k^2 + k - 2 = 0, \quad (k+2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{-k}{-1} \neq \frac{1}{k} \text{에서} \quad k^2 \neq 1$$

$$\therefore k \neq -1, k \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서} \quad k = -2$$

또 두 직선이 수직이려면

$$2(k+1) + (-k) \times (-1) = 0$$

$$3k = -2 \quad \therefore k = -\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } \alpha = -2, \beta = -\frac{2}{3} \text{이므로} \quad \alpha - \beta = -\frac{4}{3} \quad \text{답 } -\frac{4}{3}$$

0129 두 직선이 수직이려면

$$(a-1)(a-2) + 3 \times (-2) = 0$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0, \quad (a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 4 = -4 \quad \text{답 } -4$$

0130 두 직선이 각각 점 $(-1, 5)$ 를 지나므로

$$2+5a+3=0 \text{에서} \quad a = -1$$

$$-b+5c+11=0 \text{에서} \quad b-5c=11 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 직선 $-2x-y+3=0, bx+cy+11=0$ 이 수직이므로

$$-2 \times b + (-1) \times c = 0 \quad \therefore 2b+c=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면} \quad b=1, c=-2$$

$$\therefore abc=2 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0131 직선 $x-ay+1=0$ 이 직선 $x+(b-2)y-1=0$ 과 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{-a}{b-2} \neq \frac{1}{-1}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{-a}{b-2} \text{에서} \quad a+b=2 \quad \dots\dots \text{1단계}$$

직선 $x-ay+1=0$ 이 직선 $(a+1)x-(b-1)y+1=0$ 과 수직이므로

$$1 \times (a+1) + (-a) \times (-b+1) = 0$$

$$\therefore ab = -1 \quad \dots\dots \text{2단계}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= 2^2 - 2 \times (-1) = 6 \quad \dots\dots \text{3단계}$$

답 6

채점 요소	비율
1단계 두 직선이 평행할 조건을 이용하여 $a+b$ 의 값 구하기	40%
2단계 두 직선이 수직일 조건을 이용하여 ab 의 값 구하기	40%
3단계 a^2+b^2 의 값 구하기	20%

0132 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-1}{6-(-3)} = \frac{1}{3}$$

이므로 구하는 직선의 기울기는 -3 이다.

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times (-3)}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2} \right), \text{ 즉 } (0, 2)$$

따라서 기울기가 -3 이고 점 $(0, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -3x + 2 \quad \text{답 } y = -3x + 2$$

0133 두 점 $(-3, 5), (5, -7)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-7-5}{5-(-3)} = -\frac{3}{2}$$

기울기가 $-\frac{3}{2}$ 이고 점 $(2, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5 = -\frac{3}{2}(x-2) \quad \therefore 3x+2y-16=0$$

따라서 $a=3, b=-16$ 이므로

$$a+b = -13 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0134 두 직선 $3x+2y-5=0, 3x+y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$3x+2y-5+k(3x+y-1)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

$$\text{이라 하면} \quad (3k+3)x + (k+2)y - k - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직선 $\textcircled{7}$ 이 직선 $2x-y+4=0$ 과 수직이므로

$$(3k+3) \times 2 + (k+2) \times (-1) = 0, \quad 5k+4=0$$

$$\therefore k = -\frac{4}{5}$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{21}{5} = 0 \quad \therefore x+2y-7=0$$

이 직선이 점 $(a, -1)$ 을 지나므로

$$a-2-7=0 \quad \therefore a=9 \quad \text{답 } 9$$

다른 풀이 $3x+2y-5=0, 3x+y-1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = 4$$

즉 두 직선 $3x+2y-5=0, 3x+y-1=0$ 의 교점의 좌표는

$$(-1, 4)$$

직선 $2x-y+4=0$, 즉 $y=2x+4$ 의 기울기가 2이므로 이 직선

과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $(-1, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4 = -\frac{1}{2}\{x-(-1)\} \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

이 직선이 점 $(a, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -\frac{1}{2}a + \frac{7}{2} \quad \therefore a=9$$

0135 직선 $x+3y-9=0$, 즉 $y = -\frac{1}{3}x+3$ 의 기울기가

$-\frac{1}{3}$ 이므로 직선 AH의 기울기는 3이다.

따라서 직선 AH의 방정식은

$$y-11=3(x-6) \quad \therefore 3x-y-7=0$$

이때 점 H는 직선 AH와 직선 $x+3y-9=0$ 의 교점이므로

$3x-y-7=0$, $x+3y-9=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=3, y=2$$

즉 $a=3$, $b=2$ 이므로 $ab=6$

답 ③

0136 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{1-3}{2}\right), \text{ 즉 } (4, -1)$$

두 점 A(3, 1), B(5, -3)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-3-1}{5-3} = -2$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점

(4, -1)을 지나므로 그 방정식은

$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-4) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-3$$

답 ②

0137 직선 $y=-x+b$ 의 기울기가 -1이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

$$\text{즉 } \frac{5-3}{4-a}=1 \text{이므로 } a=2$$

또 직선 $y=-x+b$ 가 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, 즉

(3, 4)를 지나므로

$$4=-3+b \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=9$$

답 9

0138 직선 $2x+y-3=0$ 이 선분 AB의 중점

$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a+b}{2}, 3\right)$ 을 지나므로

$$2 \times \frac{a+b}{2} + 3 - 3 = 0 \quad \therefore a+b=0 \quad \dots\dots ㉠$$

또 직선 $2x+y-3=0$, 즉 $y=-2x+3$ 의 기울기가 -2이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{즉 } \frac{4-2}{b-a}=\frac{1}{2} \text{이므로 } b-a=4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$$\therefore a^2+b^2=8$$

답 8

0139 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+6}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 3)$$

직선 AC의 기울기는 $\frac{6-0}{3-1}=3$

따라서 선분 AC의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 점

(2, 3)을 지나므로 그 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{3}(x-2)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 (5, 4)

직선 BC의 기울기는 $\frac{6-2}{3-7}=-1$

따라서 선분 BC의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 (5, 4)를 지나므로 그 방정식은

$$y-4=x-5 \quad \therefore y=x-1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{7}{2}$, $y=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이다. **답** $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

참고 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 (4, 1)

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-0}{7-1}=\frac{1}{3}$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -3이고 점 (4, 1)을 지나므로 그 방정식은

$$y-1=-3(x-4) \quad \therefore y=-3x+13$$

이때 $-3 \times \frac{7}{2} + 13 = \frac{5}{2}$ 이므로 선분 AB의 수직이등분선도 점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 를 지난다.

0140 $x+2y=0$

..... ㉠

$x-y+3=0$

momo2000@hanmail.net

..... ㉡

$ax+y+a+1=0$

..... ㉢

이때 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{1} \neq \frac{0}{a+1} \text{이므로 } a=\frac{1}{2}$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우

$$\frac{a}{1}=\frac{1}{-1} \neq \frac{a+1}{3} \text{이므로 } a=-1$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } x=-2, y=1$$

따라서 직선 ㉢이 점 (-2, 1)을 지나야 하므로

$$-2a+1+a+1=0 \quad \therefore a=2$$

이상에서 $a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 a의 값의 곱은

$$-1 \times \frac{1}{2} \times 2 = -1$$

답 -1

0141 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선

$kx+y=-7$ 이 두 직선 $3x+y=8$, $2x+y=5$ 의 교점을 지나야 한다.

$3x+y=8$, $2x+y=5$ 를 연립하여 풀면

$$x=3, y=-1$$

따라서 직선 $kx+y=-7$ 이 점 (3, -1)을 지나야 하므로

$$3k-1=-7 \quad \therefore k=-2$$

답 -2

0142 $x+2y-6=0$

..... ㉠

$4x-3y-12=0$

..... ㉡

$ax+y-1=0$

..... ㉢

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

이때 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 수직인 경우

$$1 \times a + 2 \times 1 = 0 \text{이므로} \quad a = -2 \quad \dots \text{1단계}$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 수직인 경우

$$4 \times a + (-3) \times 1 = 0 \text{이므로} \quad a = \frac{3}{4} \quad \dots \text{2단계}$$

(i), (ii)에서 $a = -2$ 또는 $a = \frac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 a 의 값의 합은 $-2 + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4} \quad \dots \text{3단계}$

답 $-\frac{5}{4}$

	채점 요소	비율
1단계	두 직선 $x+2y-6=0$, $ax+y-1=0$ 이 수직일 때, a 의 값 구하기	40 %
2단계	두 직선 $4x-3y-12=0$, $ax+y-1=0$ 이 수직일 때, a 의 값 구하기	40 %
3단계	모든 상수 a 의 값의 합 구하기	20 %

0143 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $ax+y+5=0$, $x+2y+3=0$ 이 평

행하려면 $\frac{a}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{3} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

두 직선 $2x+by-4=0$, $x+2y+3=0$ 이 평행하려면

$$\frac{2}{1} = \frac{b}{2} \neq \frac{-4}{3} \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore a+b = \frac{9}{2} \quad \text{답 } \frac{9}{2}$$

0144 점 $(a, 3)$ 에서 두 직선 $2x-y+1=0$, $x+2y-1=0$ 까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2a-3+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|a+6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}, \quad |2a-2| = |a+5|$$

$$2a-2 = \pm(a+5) \quad \therefore a=7 \text{ 또는 } a=-1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a=7$ **답** 7

0145 $\frac{|6+24+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 8$ 이므로 $|30+k| = 40$

$$30+k = \pm 40 \quad \therefore k=10 (\because k > 0) \quad \text{답 } 3$$

0146 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$x+y-2+(x-y)k=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+y-2=0, \quad x-y=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=1 \quad \therefore A(1, 1)$

점 $A(1, 1)$ 과 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-1-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

0147 주어진 식을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(2k+1)x + (k+3)y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f(k) &= \frac{|-4|}{\sqrt{(2k+1)^2 + (k+3)^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 10k + 10}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{5(k+1)^2 + 5}} \end{aligned}$$

따라서 $5(k+1)^2 + 5$ 가 최소일 때, 즉 $k=-1$ 일 때 $f(k)$ 가 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(-1) = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

0148 평행한 두 직선 $x+2y+1=0$, $x+2y+k=0$ 사이의 거리는 직선 $x+2y+1=0$ 위의 점 $(-1, 0)$ 과 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1+0+k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 4\sqrt{5}$$

$$|k-1| = 20, \quad k-1 = \pm 20$$

$$\therefore k=21 \text{ 또는 } k=-19$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$21 + (-19) = 2 \quad \text{답 } 2$$

0149 두 직선이 평행하므로 선분 AB 의 길이의 최솟값은 두 직선 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y+3=0$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 선분 AB 의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다. **답** $2\sqrt{2}$

0150 두 직선 $ax+2y-1=0$, $3x+(a-1)y-1=0$ 이 평행하므로

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{a-1} \neq \frac{-1}{-1}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{a-1} \text{에서} \quad a(a-1) = 6$$

$$a^2 - a - 6 = 0, \quad (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 $\frac{a}{3} \neq \frac{-1}{-1}$ 에서 $a \neq 3$ 이므로

$$a = -2$$

$a = -2$ 일 때, 두 직선의 방정식은

$$-2x + 2y - 1 = 0, \quad 3x - 3y - 1 = 0$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $-2x+2y-1=0$ 위의 점

$(0, \frac{1}{2})$ 과 직선 $3x-3y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0-\frac{3}{2}-1|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{12} \quad \text{답 } \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

0151 $\overline{AB} = \sqrt{25} = 5$ 이므로 직각삼각형 AOB에서

$$3^2 + \overline{OB}^2 = 5^2 \quad \therefore \overline{OB} = 4 \quad (\because \overline{OB} > 0)$$

따라서 점 B의 좌표가 (4, 0)이므로 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore 3x + 4y - 12 = 0$$

직선 CD는 직선 AB와 평행하므로 직선 CD의 방정식을

$$3x + 4y + k = 0 \quad (k < 0)$$

이라 하면 두 직선 AB, CD 사이의 거리가 5이므로 점 A(0, 3)

과 직선 CD 사이의 거리가 5이다.

$$\therefore \frac{|12+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \text{이므로}$$

$$|k+12| = 25, \quad k+12 = \pm 25$$

$$\therefore k = -37 \quad (\because k < 0)$$

따라서 직선 CD의 방정식은

$$3x + 4y - 37 = 0$$

$$\text{이 식에 } y=0 \text{을 대입하면 } 3x-37=0 \quad \therefore x=\frac{37}{3}$$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{37}{3}$ 이다.

답 $\frac{37}{3}$

$$\begin{aligned} \mathbf{0152} \quad \overline{BC} &= \sqrt{(4-2)^2 + (2-0)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

직선 BC의 방정식은

$$y = \frac{2-0}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore x - y - 2 = 0$$

점 A(3, 4)와 직선 BC 사이의 거리를 d라 하면

$$d = \frac{|3-4-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times d \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 3

0153 $\overline{AB}$

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$y-3 = \frac{-1-3}{-2-2}(x-2)$$

$$\therefore x - y + 1 = 0$$

점 C(a, -3)과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|a+3+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a+4|}{\sqrt{2}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{|a+4|}{\sqrt{2}} = 16$$

$$|a+4| = 8, \quad a+4 = \pm 8$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a \text{는 자연수})$$

답 4

0154 직선 OA와 직선 $x-4y+12=0$ 의 기울기가 $\frac{1}{4}$ 로 같

으므로 두 직선은 평행하다.

따라서 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$ 를 밑변으로 생각하면 원점과 직선 $x-4y+12=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$\overline{OA} = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$ 이고, 원점과 직선 $x-4y+12=0$ 사이의

$$\text{거리는 } \frac{|12|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \frac{12}{\sqrt{17}}$$

$$\therefore \triangle OAP = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{12}{\sqrt{17}} = 6$$

답 6

$$\mathbf{0155} \quad x-2y-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$x+5y-9=0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$4x-y+6=0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x=4, \quad y=1$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$x=-1, \quad y=2$$

①, ③을 연립하여 풀면

$$x=-2, \quad y=-2$$

세 직선의 교점을

A(4, 1), B(-1, 2), C(-2, -2)라 하자.

... 1단계

$\overline{AC} = \sqrt{(4+2)^2 + (1+2)^2} = 3\sqrt{5}$ 이고 점 B(-1, 2)와 직선 ① 사이의 거리는

$$\frac{|-1-4-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

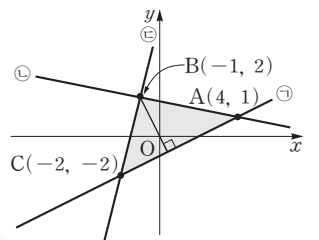
... 2단계

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{21}{2}$$

... 3단계

답 $\frac{21}{2}$



	채점 요소	비율
1단계	세 직선의 교점의 좌표 구하기	30 %
2단계	삼각형의 밑변의 길이와 높이 구하기	50 %
3단계	삼각형의 넓이 구하기	20 %

0156 $mx-y-4m+3=0$ 에서

$$m(x-4)-(y-3)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 직선 ①은 m의 값에 관계없이 점 (4, 3)을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ①이 점 (2, 0)을 지날 때

$$-2m+3=0 \quad \therefore m=\frac{3}{2}$$

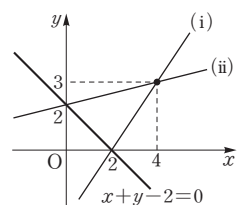
(ii) 직선 ①이 점 (0, 2)를 지날 때

$$-4m+1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} < m < \frac{3}{2}$$

답 $\frac{1}{4} < m < \frac{3}{2}$



0157 직선

$$y=m(x-1)+3$$

..... ㉠

은 m 의 값에 관계없이 점 (1, 3)을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 A(3, 4)를 지날 때

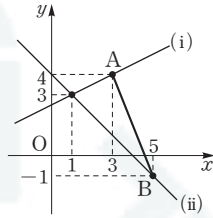
$$4=2m+3 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(5, -1)을 지날 때

$$-1=4m+3 \quad \therefore m=-1$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-1, \beta=\frac{1}{2}$ 이므로 $\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$ 답 ②



0158 $kx-y+3k-1=0$ 에서

$$(x+3)k-(y+1)=0$$

..... ㉠

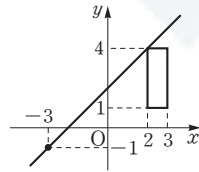
이므로 직선 ㉠은 k 의 값에 관계없이 점 (-3, -1)을 지난다.

이때 직선 ㉠의 기울기가 k 이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 (2, 4)를 지날 때 k 의 값이 최대이다.

㉠에 $x=2, y=4$ 를 대입하면

$$5k-5=0 \quad \therefore k=1$$

따라서 k 의 최댓값은 1이다. 답 1



0159 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2x-y-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$|x+2y+1| = |2x-y-3|$$

$$x+2y+1 = \pm(2x-y-3)$$

$$\therefore x-3y-4=0 \text{ 또는 } 3x+y-2=0$$

따라서 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0160 각의 이등분선 위의 점 (2, 1)에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|4+3+a|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|4-3+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}, \quad |7+a|=2$$

$$7+a=\pm 2 \quad \therefore a=-5 \text{ 또는 } a=-9$$

따라서 구하는 합은 $-5+(-9)=-14$ 답 -14

0161 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{PR}=\overline{PS}$ 이므로

$$\frac{|2x+y-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$|2x+y-2| = |x+2y-2|$$

$$2x+y-2 = \pm(x+2y-2)$$

$$\therefore x-y=0 \text{ 또는 } 3x+3y-4=0$$

답 $x-y=0$ 또는 $3x+3y-4=0$

시험에 꼭 나오는문제

0162 주어진 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

점 $(\sqrt{3}, -1)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y-(-1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$$

이 직선이 점 $(k, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \frac{\sqrt{3}}{3}k - 2 \quad \therefore k = 6\sqrt{3} \quad \text{답 ④}$$

0163 주어진 직선의 y 절편은 3이고 x 절편을 a 라 하면 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2} \times |a| \times 3 = 9, \quad |a| = 6$$

$$\therefore a = \pm 6$$

이때 직선이 제3사분면을 지나지 않으므로 $a=6$

따라서 x 절편이 6, y 절편이 3인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 3$$

즉 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다. 답 $-\frac{1}{2}$

RPM비법노트

x 절편이 a , y 절편이 b 인 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |a| \times |b| = \frac{|ab|}{2} \quad (\text{단, } ab \neq 0)$$

0164 ㄱ. 세 점 A(-1, 5), B(2, 9), C(4, 15)에서

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = \frac{9-5}{2-(-1)} = \frac{4}{3}$$

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = \frac{15-9}{4-2} = 3$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

ㄴ. 세 점 A(1, -1), B(3, -5), C(4, -7)에서

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = \frac{-5-(-1)}{3-1} = -2,$$

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = \frac{-7-(-5)}{4-3} = -2$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

ㄷ. 세 점 A(2, 0), B(3, 4), C(4, 6)에서

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = \frac{4-0}{3-2} = 4,$$

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = \frac{6-4}{4-3} = 2$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

이상에서 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0165 $\triangle APC : \triangle PBC = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$$

즉 점 P는 $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 1}{2+1} \right),$$

$$\text{즉 } \left(3, -\frac{1}{3} \right)$$

따라서 두 점 C, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{3 - 4} (x - 4)$$

$$\therefore 10x - 3y - 31 = 0$$

답 ③

0166 $ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

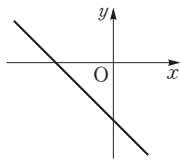
주어진 그림에서 이 직선의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

$$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore ac < 0$$

$$bx - cy + a = 0 \text{에서 } y = \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}$$

이때 $\frac{b}{c} < 0, \frac{a}{c} < 0$ 이므로 이 직선의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $bx - cy + a = 0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1 사분면을 지나지 않는다.



답 ①

0167 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x - 2y + 4)k + (-x - y + a) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x - 2y + 4 = 0, x + y - a = 0$$

이때 점 $(2, b)$ 가 두 직선 $x - 2y + 4 = 0, x + y - a = 0$ 의 교점

이므로

$$2 - 2b + 4 = 0, 2 + b - a = 0$$

$$\therefore a = 5, b = 3$$

$$\therefore a + b = 8$$

답 ⑤

0168 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$5x + 15y - 7 + k(x + 5y - 11) = 0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

이라 하면 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(5, -6)$ 을 지나므로

$$25 - 90 - 7 + k(5 - 30 - 11) = 0$$

$$-72 - 36k = 0 \quad \therefore k = -2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$5x + 15y - 7 - 2(x + 5y - 11) = 0$$

$$\therefore 3x + 5y + 15 = 0$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-5, 0), (0, -3)$ 이므로 좌표축에 의하여 잘린 선분의 길이는

$$\sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

답 ①

0169 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $3x + by + 1 = 0$ 과 수직이

므로

$$1 \times 3 + a \times b = 0$$

$$\therefore ab = -3$$

또 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $x - (b+2)y - 1 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(b+2)} \neq \frac{1}{-1}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(b+2)} \text{에서}$$

$$-b - 2 = a \quad \therefore a + b = -2$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= (-2)^3 - 3 \times (-3) \times (-2)$$

$$= -8 - 18 = -26$$

답 -26

0170 $\neg, a=0$ 이면 $l: y=-2, m: x=0$

따라서 직선 l 은 x 축에 평행하고 직선 m 은 y 축이므로 두 직선 l, m 은 수직이다. (참)

$\neg, 4x - ay + 2a = 0$ 을 a 에 대하여 정리하면

$$4x - a(y-2) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x=0, y=2$$

따라서 직선 m 은 a 의 값에 관계없이 점 $(0, 2)$ 를 항상 지난다. (거짓)

$\neg$ 두 직선 l, m 이 평행하려면

$$\frac{a}{4} = \frac{-1}{-a} \neq \frac{-2}{2a}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{-1}{-a} \text{에서 } a^2 = 4 \quad \therefore a = \pm 2$$

이때 0이 아닌 모든 실수 a 에 대하여 $\frac{-1}{-a} \neq \frac{-2}{2a}$, 즉

$\frac{1}{a} \neq -\frac{1}{a}$ 이므로 두 직선 l, m 이 평행하도록 하는 실수 a 의 값은 $-2, 2$ 의 2개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ③

0171 $\angle ABO = \angle BCO$ 에서

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$$

$$= \angle BCO + \angle OBC = 90^\circ$$

이므로 두 직선 l, m 은 수직이다.

이때 직선 l 의 기울기는

$$\frac{6-0}{0-(-8)} = \frac{3}{4}$$

이므로 직선 m 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이다.

또 직선 m 은 점 $B(-8, 0)$ 을 지나므로 직선 m 의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}(x+8)$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x - \frac{32}{3}$$

$$\therefore C\left(0, -\frac{32}{3}\right)$$

$$\text{답 } \left(0, -\frac{32}{3}\right)$$

0172 점 B의 좌표를 (a, b) 라 하자.

직선 $x+2y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로
직선 AB의 기울기는 2이다.

$$\text{즉 } \frac{b-3}{a-2}=2 \text{이므로 } 2a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 $x+2y-4=0$ 은 선분 AB의 중점 $(\frac{a+2}{2}, \frac{b+3}{2})$ 을 지나므로

$$\frac{a+2}{2}+2 \times \frac{b+3}{2}-4=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a+2b=0$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{5}, b=-\frac{1}{5}$

따라서 점 B의 좌표는 $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ 이다. 답 $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$

0173 □ABCD는 마름모이므로 두 점 B, D를 지나는 직선 l 은 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는 $\frac{1-5}{9-1}=-\frac{1}{2}$

선분 AC의 중점의 좌표는

$$(\frac{1+9}{2}, \frac{5+1}{2}), \text{ 즉 } (5, 3)$$

따라서 직선 l 은 점 $(5, 3)$ 을 지나고 기울기가 2인 직선이므로
그 방정식은

$$y-3=2(x-5) \quad \therefore 2x-y-7=0$$

즉 $a=-1, b=-7$ 이므로 $ab=7$ 답 $\textcircled{3}$

0174 두 직선 $4x+y-3=0, 3x-2y+5=0$ 은 한 점에서 만나므로 직선 $ax+2y+4=0$ 이 두 직선 $4x+y-3=0, 3x-2y+5=0$ 중 하나와 평행해야 한다.

(i) 직선 $ax+2y+4=0$ 이 직선 $4x+y-3=0$ 과 평행한 경우

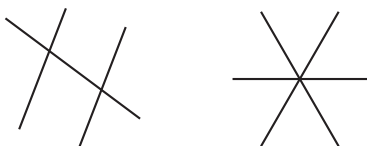
$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{4} \text{이므로 } a=8$$

(ii) 직선 $ax+2y+4=0$ 이 직선 $3x-2y+5=0$ 과 평행한 경우

$$\frac{3}{a}=\frac{-2}{2} \neq \frac{5}{4} \text{이므로 } a=-3$$

(i), (ii)에서 $a=-3$ 또는 $a=8$ 답 $-3, 8$

0175 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누려면 다음 그림과 같이 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.



$$3x-y+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x+2y-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$ax+y+7=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이때 직선 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 은 평행하지 않다.

(i) 두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 평행한 경우

$$\frac{a}{3}=\frac{1}{-1} \neq \frac{7}{5} \text{이므로 } a=-3$$

(ii) 두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 평행한 경우

$$\frac{a}{1}=\frac{1}{2} \neq \frac{7}{-3} \text{이므로 } a=\frac{1}{2}$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } x=-1, y=2$$

따라서 직선 $\textcircled{3}$ 이 점 $(-1, 2)$ 를 지나야 하므로

$$-a+2+7=0 \quad \therefore a=9$$

이상에서 $a=-3$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=9$

따라서 구하는 모든 a 의 값의 합은

$$-3+\frac{1}{2}+9=\frac{13}{2} \quad \text{답 } \frac{13}{2}$$

0176 두 직선 $x+y+1=0, 2x-y=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y+1+k(2x-y)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하면 $(2k+1)x+(1-k)y+1=0$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{(2k+1)^2+(1-k)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5k^2+2k+2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5(k+\frac{1}{5})^2+\frac{9}{5}}}$$

따라서 $5(k+\frac{1}{5})^2+\frac{9}{5}$ 가 최소일 때, 즉 $k=-\frac{1}{5}$ 일 때 거리가 최대이므로 구하는 최댓값은

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{5}}{3}$$

0177 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y-3+k(x-y-1)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하면 $(k+1)x+(1-k)y-k-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

점 $(5, 3)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|5(k+1)+3(1-k)-k-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}}=2$$

$$\therefore |k+5|=2\sqrt{2k^2+2}$$

양변을 제곱하면 $k^2+10k+25=8k^2+8$

$$7k^2-10k-17=0, \quad (k+1)(7k-17)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{17}{7}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2y-2=0 \text{ 또는 } \frac{24}{7}x-\frac{10}{7}y-\frac{38}{7}=0$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } 12x-5y-19=0$$

이때 직선이 제2사분면을 지나지 않으므로 구하는 직선의 방정식은 $12x-5y-19=0$ 이다.

$$\text{답 } 12x-5y-19=0$$

다른 풀이 $x+y-3=0$, $x-y-1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

이므로 두 직선의 교점의 좌표는 (2, 1)

점 (2, 1)을 지나는 직선의 방정식을

$$y=m(x-2)+1, \text{ 즉 } mx-y-2m+1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이라 하면 이 직선과 점 (5, 3) 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|5m-3-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2 \quad \therefore |3m-2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $9m^2-12m+4=4m^2+4$

$$5m^2-12m=0, \quad m(5m-12)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{12}{5}$$

이것을 ①에 대입하면

$$-y+1=0 \text{ 또는 } \frac{12}{5}x-y-\frac{19}{5}=0$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } 12x-5y-19=0$$

0178 직선 $3x+4y=8$ 위의 점 (0, 2)와 직선 $3x+4y=k$, 즉 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리가 4이므로

$$\frac{|0+8-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4, \quad |8-k|=20$$

$$8-k=\pm 20 \quad \therefore k=-12 \text{ 또는 } k=28$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $-12+28=16$

답 16

0179 $AB=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{2-1}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore x-2y+1=0$$

점 C(2, k)와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2-2k+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|3-2k|}{\sqrt{5}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{|3-2k|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{2}$$

$$|3-2k|=5, \quad 3-2k=\pm 5$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=4$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-1+4=3$$

답 ②

0180 $mx-y+2m-1=0$ 에서

$$(x+2)m-(y+1)=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

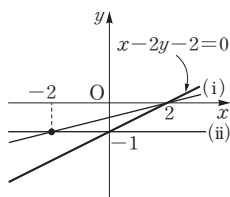
이므로 직선 ①은 m 의 값에 관계없이 점 (-2, -1)을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ①이 점 (2, 0)을 지날 때

$$4m-1=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{4}$$



(ii) 직선 ①이 점 (0, -1)을 지날 때

$$2m=0 \quad \therefore m=0$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$0 < m < \frac{1}{4}$$

답 $0 < m < \frac{1}{4}$

0181 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x , y)라 하면 점 P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|x+4y+3|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|4x+y+12|}{\sqrt{4^2+1^2}}$$

$$|x+4y+3|=|4x+y+12|$$

$$x+4y+3=\pm(4x+y+12)$$

$$\therefore x-y+3=0 \text{ 또는 } x+y+3=0$$

이 중 기울기가 양수인 것은 $x-y+3=0$ 이다.

답 ③

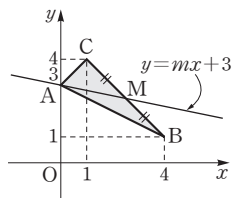
0182 직선 $y=mx+3$ 은 m 의 값에

관계없이 점 A(0, 3)을 지나므로 이

직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분

하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의

중점을 지나야 한다. ... 1단계



선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{4+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

... 2단계

따라서 직선 $y=mx+3$ 이 점 M을 지나야 하므로

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}m+3 \quad \therefore m=-\frac{1}{5}$$

... 3단계

답 $-\frac{1}{5}$

	채점 요소	비율
1단계	직선 $y=mx+3$ 이 BC의 중점을 지나도록 알기	50%
2단계	BC의 중점의 좌표 구하기	20%
3단계	m 의 값 구하기	30%

0183 점 A의 좌표를 (a , $2a$), 점 B의 좌표를 ($2b$, b)라 하면 삼각형 AOB의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}\right)$$

$$\text{즉 } \frac{a+2b}{3}=2, \frac{2a+b}{3}=3 \text{이므로 } a=4, b=1$$

$$\therefore A(4, 8), B(2, 1)$$

... 1단계

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선 l 의 기울기는

$$\frac{1-8}{2-4}=\frac{7}{2}$$

이므로 직선 l 과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{2}{7}$ 이다. ... 2단계

즉 점 G(2, 3)을 지나고 기울기가 $-\frac{2}{7}$ 인 직선의 방정식은

$$y-3=-\frac{2}{7}(x-2)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{7}x+\frac{25}{7}$$

... 3단계

답 $y=-\frac{2}{7}x+\frac{25}{7}$

채점 요소	비율
1단계 두 점 A, B의 좌표 구하기	30 %
2단계 직선 l과 수직인 직선의 기울기 구하기	30 %
3단계 점 G를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식 구하기	40 %

- 0184** $x-y+a=0$ ㉠
 $2x-y+1=0$ ㉡
 $3x-2y-a=0$ ㉢
세 직선 ㉠, ㉡, ㉢ 중 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 한 점에서 만나야 한다. ... 1단계
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=a-1, y=2a-1$$

따라서 직선 ㉢이 점 $(a-1, 2a-1)$ 을 지나야 하므로

$$3(a-1)-2(2a-1)-a=0$$

$$-2a-1=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

채점 요소	비율
1단계 세 직선의 위치 관계 구하기	40 %
2단계 a의 값 구하기	60 %

- 0185** 점 A(1, 1)과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|2-1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$... 1단계

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{5} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)^2 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

채점 요소	비율
1단계 점 A와 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리 구하기	50 %
2단계 $\triangle ABC$ 의 한 변의 길이 구하기	30 %
3단계 $\triangle ABC$ 의 넓이 구하기	20 %

- 0186** [전략] 점 P가 선분 AB를 1:2 또는 2:1로 내분하는 점임을 이용한다.

선분 AB 위의 점 P에서 만나는 두 직선 l, m에 의하여 삼각형 OAB의 넓이가 삼등분되므로 직선 l에 의하여 삼각형 OAB는 넓이가 $\frac{1}{3}\triangle OAB$, $\frac{2}{3}\triangle OAB$ 인 두 삼각형으로 나누어진다.
따라서 점 P는 선분 AB를 1:2 또는 2:1로 내분하는 점이다.

024 정답 및 풀이

- (i) 점 P가 선분 AB를 1:2로 내분하는 경우

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}\right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

또 직선 m은 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하므로 직선 m과 선분 OB가 만나는 점을 M'이라 하면 점 M'은 선분 OB의 중점이다.

즉 점 M'의 좌표가 (0, 3)이므로 직선 m의 기울기는

$$\frac{\frac{2-3}{4}}{\frac{3}{3}-0} = -\frac{3}{4}$$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

- (ii) 점 P가 선분 AB를 2:1로 내분하는 경우

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1}\right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{2}{3}, 4\right)$$

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{3}} = 6$$

또 직선 m은 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하므로 직선 m과 선분 OA가 만나는 점을 M''이라 하면 점 M''은 선분 OA의 중점이다.

즉 점 M''의 좌표가 (1, 0)이므로 직선 m의 기울기는

$$\frac{\frac{4-0}{2}}{\frac{3}{3}-1} = -12$$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$6 + (-12) = -6$$

- (i), (ii)에서 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

답 ①

- 0187** [전략] 먼저 세 교점 A, B, C의 좌표를 구한다.

$$x+2y-3=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$y=1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$x-y+6=0 \quad \dots\dots ㉢$$

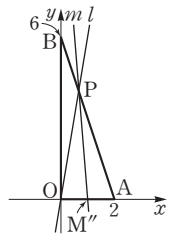
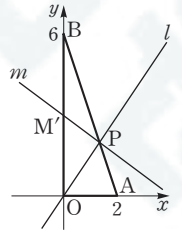
㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$$x=-3, y=3 \quad \therefore A(-3, 3)$$

㉡을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$$x-1=0, x+5=0 \quad \therefore x=1, x=-5$$

$$\therefore B(-5, 1), C(1, 1)$$



한편 삼각형의 외심은 각 변의 수직이등분선의 교점이다.

변 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$, 즉 $(-2, 1)$

따라서 변 BC의 수직이등분선의 방정식은

$$x = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3-5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(-4, 2)$

또 직선 AB, 즉 $x-y+6=0$ 의 기울기는 1이므로 변 AB의 수직이등분선은 기울기가 -1 이다.

따라서 변 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y-2=-(x+4)$$

$$\therefore y = -x-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

②을 ②에 대입하면 $y=0$

즉 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(-2, 0)$

점 $(-2, 0)$ 과 직선 $x-y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-0+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

다른 풀이 삼각형 ABC의 외심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(-3-a)^2 + (3-b)^2 = (-5-a)^2 + (1-b)^2$$

$$a^2 + 6a + b^2 - 6b + 18 = a^2 + 10a + b^2 - 2b + 26$$

$$\therefore a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$\overline{PB} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(-5-a)^2 + (1-b)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2$$

$$a^2 + 10a + 25 = a^2 - 2a + 1$$

$$\therefore a = -2$$

이것을 ②에 대입하면 $-2 + b = -2$

$$\therefore b = 0$$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(-2, 0)$ 이다.

0188 **전략** 삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점을 이용한다.

두 직선 $3x-4y+4=0$,

$4x-3y+12=0$ 과 y 축으로 둘러싸인

삼각형은 오른쪽 그림과 같다.

이때 삼각형의 내심은 세 내각의 이등

분선의 교점이므로

$$\begin{aligned} \frac{|3a-4b+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} &= \frac{|4a-3b+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = |a| \\ &= \frac{|4a-3b+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = |a| \end{aligned}$$

$$\text{(i)} \quad \frac{|3a-4b+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = |a| \text{에서}$$

$$|3a-4b+4| = 5|a|$$

$$3a-4b+4 = \pm 5a$$

$$\therefore a+2b-2=0 \text{ 또는 } 2a-b+1=0$$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선의 기울기가 음수이므로

$$a+2b-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{|4a-3b+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = |a| \text{에서}$$

$$|4a-3b+12| = 5|a|$$

$$4a-3b+12 = \pm 5a$$

$$\therefore a+3b-12=0 \text{ 또는 } 3a-b+4=0$$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선의 기울기가 양수이므로

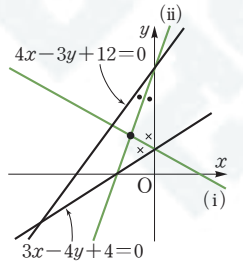
$$3a-b+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$$

㉗, ㉘을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{6}{7}, b = \frac{10}{7}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = -\frac{3}{5}$$

답 $-\frac{3}{5}$



03 원의 방정식

교과서 문제 정복하기

본책 033쪽

0189 **답** 중심의 좌표: (4, 1), 반지름의 길이: 5

0190 **답** 중심의 좌표: (0, 3), 반지름의 길이: 3

0191 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 에서 $(x-2)^2 + y^2 = 4$
따라서 중심의 좌표는 (2, 0), 반지름의 길이는 2이다.

답 중심의 좌표: (2, 0), 반지름의 길이: 2

0192 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$ 에서
 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$
따라서 중심의 좌표는 (1, 3), 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

답 중심의 좌표: (1, 3), 반지름의 길이: $\sqrt{2}$

0193 중심의 좌표가 (2, 2)이고 반지름의 길이가 1인 원이므로
 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

답 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

0194 중심의 좌표가 (3, -2)이고 반지름의 길이가 2인 원이므로
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$

답 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$

0195 **답** $x^2 + y^2 = 9$

0196 **답** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

0197 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 점 $(-3, 2)$ 이므로

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$1^2 + (-2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \text{답 } (x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

0198 **답** $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

0199 **답** $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$

0200 **답** $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$

0201 $x - y + 3 = 0$ 에서 $y = x + 3$

$y = x + 3$ 을 $x^2 + y^2 = 36$ 에 대입하면

$$x^2 + (x+3)^2 = 36 \quad \therefore 2x^2 + 6x - 27 = 0$$

026 정답 및 풀이

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 2 \times (-27) = 63 > 0$$

따라서 원 C 와 직선 l 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0202 $x - 2y - 1 = 0$ 에서 $x = 2y + 1$

$x = 2y + 1$ 을 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ 에 대입하면

$$(2y+1)^2 + y^2 + 4(2y+1) - 2y + 4 = 0$$

$$\therefore 5y^2 + 10y + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 5^2 - 5 \times 9 = -20 < 0$$

따라서 원 C 와 직선 l 은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0203 원의 중심 (1, 2)와 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 5이고 $\sqrt{5} < 5$ 이므로 원 C 와 직선 l 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 교점의 개수는 2이다.

답 2

0204 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16$$

원의 중심 (4, -3)과 직선 $3x + y + 11 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12-3+11|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

이때 원의 반지름의 길이가 4이고 $2\sqrt{10} > 4$ 이므로 원 C 와 직선 l 은 만나지 않는다.

즉 교점의 개수는 0이다.

답 0

0205 $y = 2x \pm \sqrt{5} \times \sqrt{2^2+1} \quad \therefore y = 2x \pm 5$

답 $y = 2x + 5, y = 2x - 5$

0206 **답** $x + \sqrt{3}y = 4$

0207 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9) = 0$$

$$\therefore 6x + 8y - 13 = 0$$

답 $6x + 8y - 13 = 0$

0208 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4y + k(x^2 + y^2 - 2x) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

..... ㉠

이 원이 점 (3, 0)을 지나므로

$$9 + 3k = 0 \quad \therefore k = -3$$

$k = -3$ 을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 4y - 3(x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

$$-2x^2 - 2y^2 + 6x - 4y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0$$

답 $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0$

유형 익히기

• 본책 034~043쪽

0209 중심이 x 축 위에 있으므로 원의 방정식을

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

이라 하면 이 원이 두 점 $(0, -4), (1, 3)$ 을 지나므로

$$a^2 + 16 = r^2, (1-a)^2 + 9 = r^2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -3, r^2 = 25$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

답 ④

0210 원 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$

이므로 이 원과 중심이 같은 원의 방정식을

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = r^2$$

이라 하면 이 원이 점 $(5, 1)$ 을 지나므로

$$r^2 = (5-3)^2 + (1+2)^2 = 13$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2 = \pi \times 13 = 13\pi$$

답 13π

0211 중심이 y 축 위에 있으므로 원의 방정식을

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2$$

이라 하면 이 원이 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나므로

$$1 + (2-b)^2 = r^2, 9 + (4-b)^2 = r^2$$

두 식을 연립하여 풀면 $b=5, r^2=10$

따라서 원의 방정식은 $x^2 + (y-5)^2 = 10$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 5)$ 이다. (참)

ㄴ. $3^2 + (6-5)^2 = 10$ 이므로 원은 점 $(3, 6)$ 을 지난다. (참)

ㄷ. 넓이는 10π 이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0212 원의 중심 (a, b) 가 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$$b=2a-1$$

..... ㉠

따라서 원의 방정식을

$$(x-a)^2 + (y-2a+1)^2 = r^2$$

이라 하면 이 원이 두 점 $(1, 4), (3, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2 + (4-2a+1)^2 = r^2, (3-a)^2 + (2-2a+1)^2 = r^2$$

$$\therefore 5a^2 - 22a + 26 = r^2, 5a^2 - 18a + 18 = r^2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, r^2=2$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$$\therefore a+b+r^2=7$$

답 7

다른 풀이 원의 중심 $(a, 2a-1)$ 에서 두 점 $(1, 4), (3, 2)$ 까지의 거리가 같으므로

$$(a-1)^2 + (2a-1-4)^2 = (a-3)^2 + (2a-1-2)^2$$

$$5a^2 - 22a + 26 = 5a^2 - 18a + 18$$

$$-4a = -8 \quad \therefore a=2$$

0213 원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표와 같으므로

$$a = \frac{-1+5}{2} = 2, b = \frac{2+6}{2} = 4$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(5+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\therefore r^2 = 13$$

$$\therefore a+b+r^2=19$$

답 19

0214 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{4-2}{2} \right), \text{ 즉 } (3, 1)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원 C 의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$$

⑤ $(6-3)^2 + (2-1)^2 = 10$ 이므로 점 $(6, 2)$ 는 원 C 위의 점이다.

답 ⑤

0215 $4x-5y+40=0$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$4x+40=0 \quad \therefore x=-10$$

$4x-5y+40=0$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$-5y+40=0 \quad \therefore y=8$$

$$\therefore P(-10, 0), Q(0, 8)$$

... 1단계

두 점 P, Q 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-10+0}{2}, \frac{0+8}{2} \right), \text{ 즉 } (-5, 4)$$

... 2단계

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{41}$$

... 3단계

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+5)^2 + (y-4)^2 = 41$$

... 4단계

$$\text{답 } (x+5)^2 + (y-4)^2 = 41$$

	채점 요소	비율
1단계	점 P, Q의 좌표 구하기	20 %
2단계	원의 중심의 좌표 구하기	30 %
3단계	원의 반지름의 길이 구하기	30 %
4단계	원의 방정식 구하기	20 %

0216 $x^2+y^2-4x+ay-3=0$ 에서

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + 7$$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$$\frac{a^2}{4} + 7 = 16, \quad a^2 = 36 \quad \therefore a = \pm 6$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$ 또는 $(2, 3)$ 이므로 원점과 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

답 $\sqrt{13}$

0217 ① $x^2+y^2+6x=0$ 에서

$$(x+3)^2+y^2=9$$

② $x^2+y^2+2x-8y-8=0$ 에서

$$(x+1)^2+(y-4)^2=25$$

③ $x^2+y^2+x+y+1=0$ 에서

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

④ $x^2+y^2+4x+2y-1=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y+1)^2=6$$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5$$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0218 $x^2+y^2+6x-4y+1=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y-2)^2=12$$

..... ㉠

$x^2+y^2+2bx=0$ 에서

$$(x+b)^2+y^2=b^2$$

..... ㉡

원 ㉠의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$, 원 ㉡의 중심의 좌표는 $(-b, 0)$ 이고 직선 $ax+y+4=0$ 이 두 원 ㉠, ㉡의 넓이를 동시에 이등분하려면 두 원의 중심을 모두 지나야 하므로

$$-3a+2+4=0, -ab+4=0 \quad \therefore a=2, b=2$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

0219 $x^2+y^2+2kx-k^2-6k-4=0$ 에서

$$(x+k)^2+y^2=2k^2+6k+4$$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$$0 < \sqrt{2k^2+6k+4} \leq 2, \quad 0 < 2k^2+6k+4 \leq 4$$

$$\therefore 0 < k^2+3k+2 \leq 2$$

(i) $k^2+3k+2 > 0$ 에서 $(k+2)(k+1) > 0$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > -1$$

..... ㉠

(ii) $k^2+3k+2 \leq 2$ 에서 $k^2+3k \leq 0$

$$k(k+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq k \leq 0$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-3 \leq k < -2$ 또는 $-1 < k \leq 0$

$$\text{답 } -3 \leq k < -2 \text{ 또는 } -1 < k \leq 0$$

0220 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 이므로

$$(a-3)^2+(b-4)^2=(a-2)^2+(b+1)^2$$

$$\therefore a+5b=10$$

..... ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$ 에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$ 이므로

$$(a-2)^2+(b+1)^2=(a+3)^2+b^2$$

$$\therefore 5a-b=-2$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=2$

즉 원의 중심은 $P(0, 2)$ 이므로 원의 반지름의 길이는

$$r=\overline{PA}=\sqrt{(0-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$$

$$\therefore a^2+b^2+r^2=0+4+13=17$$

답 17

다른 풀이 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 이라 하면

이 원이 세 점 $A(3, 4), B(2, -1), C(-3, 0)$ 을 지나므로

$$9+16+3A+4B+C=0$$

..... ㉠

$$4+1+2A-B+C=0$$

..... ㉡

$$9-3A+C=0$$

..... ㉢

㉠에서 $C=3A-9$

..... ㉣

㉡, ㉢에 각각 ㉣을 대입하여 정리하면

$$3A+2B+8=0, 5A-B-4=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A=0, B=-4$$

$A=0$ 을 ㉣에 대입하면 $C=-9$

따라서 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4y-9=0$$

$$\therefore x^2+(y-2)^2=13$$

즉 $a=0, b=2, r=\sqrt{13}$ 이므로

$$a^2+b^2+r^2=0+4+13=17$$

0221 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$

$\overline{PA}=\overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 이므로

$$(a+5)^2+b^2=(a-1)^2+(b-2)^2$$

$$\therefore 3a+b=-5$$

..... ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$ 이므로

$$(a+5)^2+b^2=(a-3)^2+(b-4)^2$$

$$\therefore 2a+b=0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-5, b=10$$

즉 원의 중심은 $P(-5, 10)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{PA}=10$$

따라서 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y-10)^2=100$$

점 $(k, 16)$ 이 이 원 위의 점이므로

$$(k+5)^2+(16-10)^2=100$$

$$k^2+10k-39=0, \quad (k+13)(k-3)=0$$

$$\therefore k=3 \quad (\because k > 0)$$

답 ①

0222 외접원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$

$\overline{PA}=\overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 이므로

$$(a-1)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-1)^2$$

$$\therefore a=b$$

..... ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$ 에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$ 이므로

$$(a-2)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$$

$$2a=5 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$$

$a=\frac{5}{2}$ 를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{2}$

즉 원의 중심은 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{답 } \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

0223 원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+1)$ 이라 하자.

원이 x 축에 접하므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a-1)^2 = (a+1)^2$$

이 원이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$(-1-a)^2 + (-1-a-1)^2 = (a+1)^2$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1 \quad \text{답 } (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

0224 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 원이 x 축에 접하므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

이 원이 두 점 $(1, 1), (2, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2 + (1-b)^2 = b^2, \quad (2-a)^2 + (2-b)^2 = b^2$$

$$\therefore a^2 - 2a - 2b + 2 = 0, \quad a^2 - 4a - 4b + 8 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$ 또는 $a=-2, b=5$

이때 원의 반지름의 길이는 $|b|$ 이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$1+5=6 \quad \text{답 } 6$$

0225 $x^2+y^2-6x+2ky+10=0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y+k)^2 = k^2 - 1$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{k^2-1}$ 이고 이 원이 y 축에 접하므로

$$3 = \sqrt{k^2-1}$$

양변을 제곱하면 $9 = k^2 - 1, \quad k^2 = 10$

$$\therefore k = \pm\sqrt{10}$$

이때 원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로

$$-k < 0, \text{ 즉 } k > 0 \quad \therefore k = \sqrt{10} \quad \text{답 } \sqrt{10}$$

0226 원 $x^2+y^2+2ax-4y+b=0$ 이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$9+1+6a+4+b=0$$

$$\therefore 6a+b=-14 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

$x^2+y^2+2ax-4y+b=0$ 에서

$$(x+a)^2 + (y-2)^2 = a^2 - b + 4 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2-b+4}$ 이고 이 원이 y 축에 접하므로

$$|-a| = \sqrt{a^2-b+4}$$

양변을 제곱하면 $a^2 = a^2 - b + 4 \quad \therefore b = 4$

$b=4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $6a+4=-14$

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore a+b=1$$

... 3단계

... 4단계

답 1

	채점 요소	비율
1단계	원이 점 $(3, -1)$ 을 지남을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	20%
2단계	원의 방정식을 $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ 의 꼴로 변형하기	20%
3단계	a, b 의 값 구하기	50%
4단계	$a+b$ 의 값 구하기	10%

0227 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제1사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이다.

따라서 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

이 원이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0 \quad \therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(1, 1), (5, 5)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{답 } 4\sqrt{2}$$

0228 중심의 좌표가 $(-2, 2)$ 이고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

이 원이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$1+(a-2)^2=4, \quad a^2-4a+1=0$$

$$\therefore a = 2 \pm \sqrt{3}$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$(2+\sqrt{3}) \times (2-\sqrt{3}) = 1 \quad \text{답 } 1$$

0229 원의 중심이 제4사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이다.

이때 원의 중심 $(r, -r)$ 가 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$$r+r-2=0 \quad \therefore r=1$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 1^2 = \pi \quad \text{답 } \pi$$

0230 $x^2+y^2+4x+2ay+10-b=0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y+a)^2 = a^2 - b - 6$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2-b-6}$ 이고 이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|-2| = |-a| = \sqrt{a^2-b-6}$$

$$\therefore a=2, b=6 \quad (\because a>0)$$

$$\therefore a+b=8$$

답 ④

0231 $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 16$$

점 A(-2, 1)과 원의 중심 (2, -4) 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-2)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{41}$$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로

$$M = \sqrt{41} + 4, m = \sqrt{41} - 4$$

$$\therefore Mm = (\sqrt{41} + 4) \times (\sqrt{41} - 4) = 25$$

답 ④

momo2000@hanmail.net

0232 점 (3, -6)과 원의 중심 (0, 0) 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 r 이므로 점 (3, -6)과 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은

$$3\sqrt{5} + r$$

즉 $3\sqrt{5} + r = 4\sqrt{5}$ 이므로

$$r = \sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

0233 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 의 중심을 C(2, 3)이라 하면

$$CQ = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$$5-3 \leq PQ \leq 5+3$$

$$\therefore 2 \leq PQ \leq 8$$

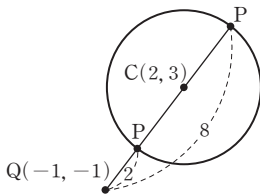
$PQ=2$, 8인 점 P는 각각 1개씩이

고, $PQ=3, 4, 5, 6, 7$ 인 점 P는

각각 2개씩이므로 구하는 점 P의 개수는

$$2 \times 1 + 5 \times 2 = 12$$

답 12



0234 $\sqrt{(a+4)^2 + (b-3)^2}$ 의 값은 점 P(a, b)와 점 (-4, 3) 사이의 거리와 같다.

이때 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이고 점 (-4, 3)과 원의 중심 (0, 0) 사이의 거리는

$$\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 점 P와 점 (-4, 3) 사이의 거리의 최댓값은

$$5+2=7$$

따라서 $\sqrt{(a+4)^2 + (b-3)^2}$ 의 최댓값도 7이다.

답 ③

0235 원의 중심 (-1, 2)와 직선 $y=2x-k$, 즉

$2x-y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-2-k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k+4|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k+4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}, \quad |k+4| < 5$$

$$-5 < k+4 < 5 \quad \therefore -9 < k < 1$$

따라서 정수 k 는 -8, -7, -6, ..., 0의 9개이다.

답 ④

다른 풀이 $y=2x-k$ 를 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 에 대입하면

$$(x+1)^2 + (2x-k-2)^2 = 5$$

$$\therefore 5x^2 - (4k+6)x + k^2 + 4k = 0$$

x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(2k+3)\}^2 - 5(k^2 + 4k) > 0$$

$$-k^2 - 8k + 9 > 0, \quad k^2 + 8k - 9 < 0$$

$$(k+9)(k-1) < 0$$

$$\therefore -9 < k < 1$$

0236 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + a = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13-a$$

원의 중심 (-2, 3)과 직선 $3x+4y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6+12+4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13-a}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$2 < \sqrt{13-a}$$

양변을 제곱하면 $4 < 13-a$

$$\therefore a < 9$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 8이다.

답 ①

0237 원 C의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

원의 중심 (1, 1)과 직선 $y=mx-2$, 즉 $mx-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m-1-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} < 1$$

$$\therefore |m-3| < \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 6m + 9 < m^2 + 1, \quad -6m < -8$$

$$\therefore m > \frac{4}{3}$$

$$\text{답 } m > \frac{4}{3}$$

0238 원의 중심 (2, 0)과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k-2|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad |k-2| = 2$$

$$k-2 = \pm 2 \quad \therefore k = 4 (\because k > 0)$$

답 ④

다른 풀이 $y = -x + k$ 를 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$(x-2)^2 + (-x+k)^2 = 2$$

$$\therefore 2x^2 - (2k+4)x + k^2 + 2 = 0$$

x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k+2)\}^2 - 2(k^2+2) = 0$$

$$-k^2 + 4k = 0, \quad k(k-4) = 0$$

$$\therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

0239 원의 중심 $(-2, 3)$ 과 직선 $x - 2y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-6+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|k-8|}{\sqrt{5}}$$

넓이가 5π 인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-8|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad |k-8| = 5$$

$$k-8 = \pm 5 \quad \therefore k = 13 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$13 + 3 = 16 \quad \text{답 16}$$

0240 x 축과 y 축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 방정식을

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \quad (a > 0)$$

이라 하면 원의 중심 (a, a) 와 직선 $5x + 12y - 8 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5a+12a-8|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|17a-8|}{13}$$

원의 반지름의 길이가 a 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|17a-8|}{13} = a, \quad |17a-8| = 13a$$

$$17a-8 = \pm 13a \quad \therefore a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{4}{15}$$

따라서 두 원 중 큰 원의 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi \quad \text{답 4}\pi$$

0241 $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$$

기울기가 $\tan 45^\circ = 1$ 인 접선의 방정식을 $y = x + b$ 로 놓으면 원의 중심 $(3, -1)$ 과 직선 $y = x + b$, 즉 $x - y + b = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+1+b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|b+4|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|b+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad |b+4| = 2$$

$$b+4 = \pm 2 \quad \therefore b = -2 \text{ 또는 } b = -6$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = x - 2 \text{ 또는 } y = x - 6 \quad \text{답 } y = x - 2, y = x - 6$$

0242 원의 중심 $(-1, 0)$ 과 직선 $y = mx - 2m$, 즉

$$mx - y - 2m = 0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|-m-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}} > 1$$

$$|3m| > \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 > m^2 + 1, \quad m^2 > \frac{1}{8}$$

$$\therefore m < -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 또는 } m > \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 m 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

다른 풀이 $y = mx - 2m$ 을 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$(x+1)^2 + (mx-2m)^2 = 1$$

$$\therefore (m^2+1)x^2 - (4m^2-2)x + 4m^2 = 0$$

x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 만나지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(2m^2-1)\}^2 - (m^2+1) \times 4m^2 < 0$$

$$-8m^2 + 1 < 0, \quad m^2 > \frac{1}{8}$$

$$\therefore m < -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 또는 } m > \frac{\sqrt{2}}{4}$$

0243 $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 에서

$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

원의 중심 $(a, 0)$ 과 직선 $x + y - 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|a-3|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{2}} > 1, \quad |a-3| > \sqrt{2}$$

$$a-3 < -\sqrt{2} \text{ 또는 } a-3 > \sqrt{2}$$

$$\therefore a < 3-\sqrt{2} \text{ 또는 } a > 3+\sqrt{2}$$

따라서 한 자리 자연수 a 는 1, 5, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$$1+5+6+7+8+9=36 \quad \text{답 36}$$

0244 두 점 $(-2, -1), (4, -3)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1-3}{2} \right), \text{ 즉 } (1, -2)$$

반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \sqrt{(4+2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{10} \quad \dots \text{1단계}$$

원의 중심 $(1, -2)$ 와 직선 $y = 3x + k$, 즉 $3x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|k+5|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+5|}{\sqrt{10}} > \sqrt{10}, \quad |k+5| > 10$$

$$k+5 < -10 \text{ 또는 } k+5 > 10$$

$$\therefore k < -15 \text{ 또는 } k > 5$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

... 2단계

... 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	40 %
2단계 k 의 값의 범위 구하기	50 %
3단계 자연수 k 의 최솟값 구하기	10 %

0245 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $C(1, 2)$ 라 하고, 점 C 에서 직선 $x-y+2=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

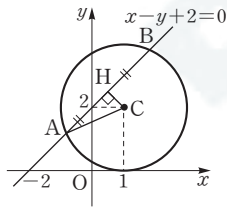
직각삼각형 ACH 에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = \sqrt{14}$$

답 $\sqrt{14}$



0246 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B , 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $y=x+k$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

직각삼각형 AOH 에서

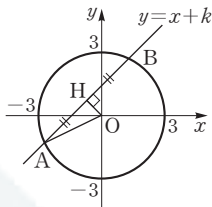
$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

따라서 점 $O(0, 0)$ 과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 1, \quad |k| = \sqrt{2}$$

$$\therefore k = \sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$

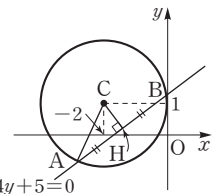
답 ②



0247 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B 라 하면 두 점 A, B 를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원이다.

... 1단계

$$3x-4y+5=0$$



원의 중심을 $C(-2, 1)$ 이라 하고 점 C 에서 직선 $3x-4y+5=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|-6-4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 1$$

... 2단계

직각삼각형 CAH 에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

... 3단계

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

... 4단계

답 3π

채점 요소	비율
1단계 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알기	30 %
2단계 $\overline{CH}$ 의 길이 구하기	30 %
3단계 $\overline{AH}$ 의 길이 구하기	30 %
4단계 넓이가 최소인 원의 넓이 구하기	10 %

0248 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

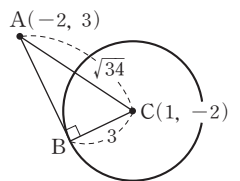
원의 중심을 $C(1, -2)$ 라 하면 점 C 와 점 $A(-2, 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{CA} = \sqrt{(-2-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}$$

따라서 직각삼각형 ABC 에서

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 3^2} = 5$$

답 ④



0249 직각삼각형 OAP 에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

이때 $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ (RHS 합동)이므로 사각형 $OAPB$ 의 넓이는

$$2 \times \triangle OAP = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \right) = 4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

0250 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 31 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 36$$

원의 중심을 $C(-2, 1)$ 이라 하면 점 C 와 점 $P(a, 1)$ 사이의 거리는

$$\overline{CP} = |a - (-2)| = |a+2|$$

따라서 접점을 Q 라 하면 직각삼각형

CPQ 에서

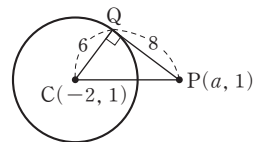
$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{PQ}^2, \quad |a+2|^2 = 6^2 + 8^2$$

$$(a+2)^2 = 100$$

$$a+2 = \pm 10$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

답 ③



0251 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$ 에서

$$(x+1)^2+(y-3)^2=8$$

원의 중심 $(-1, 3)$ 과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$M = \frac{5\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}, m = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore M+m=5\sqrt{2} \quad \text{답 } 5\sqrt{2}$$

0252 원의 중심 $(1, -2)$ 와 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \text{답 } ②$$

0253 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|k|}{5} \quad \dots \text{①단계}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{|k|}{5} + 2$$

$$\text{즉 } \frac{|k|}{5} + 2 = 5 \text{이므로 } |k| = 15$$

$$\therefore k=15 (\because k>0) \quad \dots \text{②단계}$$

답 15

	채점 요소	비율
①단계	원의 중심과 직선 사이의 거리 구하기	40 %
②단계	k의 값 구하기	60 %

0254 $x^2+y^2-10x+6y+25=0$ 에서

$$(x-5)^2+(y+3)^2=9$$

원의 중심 $(5, -3)$ 과 직선 $x+2y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5-6-9|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 d라 하면

$$2\sqrt{5}-3 \leq d \leq 2\sqrt{5}+3$$

따라서 정수 d의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는

$$6 \times 2 = 12 \quad \text{답 } 12$$

0255 직선 $x+2\sqrt{2}y-8=0$ 의 기울기는 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $2\sqrt{2}$ 이다.

원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 $2\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y=2\sqrt{2}x \pm 3\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}$$

$$\therefore y=2\sqrt{2}x+9 \text{ 또는 } y=2\sqrt{2}x-9$$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 9, -9이므로

$$PQ = |9 - (-9)| = 18 \quad \text{답 } ④$$

0256 원 $x^2+y^2=5$ 에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$$y=-2x \pm \sqrt{5} \times \sqrt{(-2)^2+1}$$

$$\therefore y=-2x+5 \text{ 또는 } y=-2x-5$$

따라서 두 직선의 x절편은 각각 $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2}$ 이므로 구하는 곱은

$$\frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} \quad \text{답 } ③$$

0257 원의 방정식을 $x^2+y^2=r^2$ 이라 하면 이 원이 점 $(2, -2)$ 를 지나므로

$$r^2=2^2+(-2)^2=8$$

$$\therefore x^2+y^2=8$$

한편 직선 $x-2y+1=0$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선과 평행

한 직선의 기울기도 $\frac{1}{2}$ 이다.

원 $x^2+y^2=8$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x \pm 2\sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+\sqrt{10} \text{ 또는 } y=\frac{1}{2}x-\sqrt{10}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\sqrt{10}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\sqrt{10}$ 이므로

$$ab^2 = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \quad \text{답 } 5$$

0258 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=20 \quad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$$

이 접선의 기울기가 3이므로

$$-\frac{a}{b}=3 \quad \therefore a=-3b \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 (a, b) 는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=20 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3\sqrt{2}, b=\sqrt{2} \text{ 또는 } a=3\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$$

$$\therefore ab=-6 \quad \text{답 } ②$$

0259 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x-3y-10=0$$

따라서 접선의 x절편은 10, y절편은 $-\frac{10}{3}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{10}{3} = \frac{50}{3} \quad \text{답 } \frac{50}{3}$$

0260 점 $(-4, a)$ 는 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점이므로

$$16 + a^2 = 25, \quad a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-4, 3)$ 에서의 접선의 방정식은 $-4x + 3y = 25$

이 접선이 점 $(b, -5)$ 를 지나므로 $-4b - 15 = 25 \quad \therefore b = -10$

$$\therefore a + b = -7$$

답 -7

0261 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(-2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $-2x + y = 5 \quad \therefore 2x - y + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + a = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13 - a$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 이 원에 접하려면 원의 중심 $(3, 2)$ 와 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{13-a}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|6-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{13-a} \quad \therefore \frac{9}{\sqrt{5}} = \sqrt{13-a}$$

양변을 제곱하면 $\frac{81}{5} = 13-a$

$$\therefore a = -\frac{16}{5}$$

답 $-\frac{16}{5}$

0262 점 $(1, 2)$ 를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-2=m(x-1)$$

$$\therefore mx-y-m+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원과 직선 $\textcircled{1}$ 이 접하려면 원의 중심 $(-2, 1)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-2m-1-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1 \quad \therefore |1-3m| = \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$1-6m+9m^2=m^2+1, \quad 4m^2-3m=0$$

$$m(4m-3)=0 \quad \therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{3}{4}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-y+2=0 \text{ 또는 } \frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0$$

$$\therefore y=2 \text{ 또는 } 3x-4y+5=0$$

답 $y=2, 3x-4y+5=0$

0263 직선 l 과 원 O 의 접점의 좌표가 (x_1, y_1) 이라 하면 직선 l 의 방정식은 $x_1x + y_1y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이때 직선 l 이 원 O' 의 넓이를 이등분하므로 원 O' 의 중심 $(0, -2)$ 를 지난다.

$$\text{즉 } -2y_1 = 1 \text{ 이므로 } y_1 = -\frac{1}{2}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 원 O 위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 1$

$y_1 = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$x_1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \therefore x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \quad \therefore y = \pm \sqrt{3}x - 2$$

이때 직선 l 의 기울기가 양수이므로 직선 l 의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x - 2$$

답 $y = \sqrt{3}x - 2$

다른 풀이 직선 l 이 원 O' 의 넓이를 이등분하므로 직선 l 은 원 O' 의 중심 $(0, -2)$ 를 지난다.

이때 직선 l 의 기울기를 m ($m > 0$)이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y = mx - 2 \quad \therefore mx - y - 2 = 0$$

원 O 와 직선 l 이 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1 \quad \therefore 2 = \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $4 = m^2 + 1$

$$m^2 = 3 \quad \therefore m = \sqrt{3} \quad (\because m > 0)$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $y = \sqrt{3}x - 2$

0264 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4$$

이 직선이 점 $P(-4, 0)$ 을 지나므로

$$-4x_1 = 4 \quad \therefore x_1 = -1$$

또 점 (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의

점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 4$

$x_1 = -1$ 을 대입하면 $(-1)^2 + y_1^2 = 4$

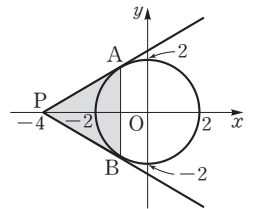
$$\therefore y_1 = \pm \sqrt{3}$$

따라서 접점의 좌표가 $(-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$ 이므로

$$AB = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle PAB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \{-1 - (-4)\} = 3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$



0265 점 $A(1, 1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-1=m(x-1) \quad \therefore mx-y-m+1=0$$

원과 이 직선이 접하려면 원의 중심 $(3, -5)$ 와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 r 와 같아야 하므로

$$\frac{|3m+5-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = r \quad \therefore |2m+6| = r\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 + 24m + 36 = r^2m^2 + r^2$$

$$\therefore (4-r^2)m^2 + 24m + 36 - r^2 = 0$$

m 에 대한 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선의 기울기가 m_1, m_2 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1m_2 = \frac{36-r^2}{4-r^2} = -1, \quad 36-r^2 = r^2-4$$

$$r^2 = 20 \quad \therefore r = 2\sqrt{5} \quad (\because r > 0)$$

답 $2\sqrt{5}$

다른 풀이 원의 중심을 $C(3, -5)$,

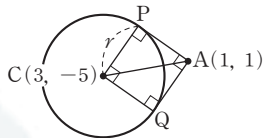
두 접선의 접점을 P, Q 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 사각형

$APCQ$ 는 정사각형이다.

따라서 직각삼각형 CAP 에서 $\overline{CA}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{AP}^2$

$$(1-3)^2 + (1+5)^2 = r^2 + r^2, \quad 2r^2 = 40$$

$$r^2 = 20 \quad \therefore r = 2\sqrt{5} \quad (\because r > 0)$$



0266 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 8x - (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3) = 0$$

$$2x - 4y + 3 = 0 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

이 직선이 직선 $y = ax + 6$ 과 수직이므로

$$\frac{1}{2} \times a = -1 \quad \therefore a = -2$$

답 -2

0267 $(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서 $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 - 4x - 6) = 0$$

$$4x + y + 1 = 0 \quad \therefore y = -4x - 1$$

즉 $a = -4, b = -1$ 이므로 $a + b = -5$

답 ①

0268 $(x+2)^2 + y^2 = 12$ 에서 $x^2 + y^2 + 4x - 8 = 0$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$ 에서 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 4x - 8 - (x^2 + y^2 - 2x + 6y) = 0$$

$$\therefore 3x - 3y - 4 = 0$$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

0269 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + x - (x^2 + y^2 - 2x + y) = 0$$

$$3x - y = 0 \quad \therefore y = 3x$$

따라서 기울기가 3이고 점 $(1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \therefore y = 3x - 2$$

답 $y = 3x - 2$

0270 $x^2 + y^2 = 1$ 에서 $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 에서 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

..... ㉠

이 원이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로 $9 + 3k = 0 \quad \therefore k = -3$

$k = -3$ 을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 1 - 3(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

따라서 $A = -3, B = -3, C = 2$ 이므로

$$A + B + C = -4$$

답 -4

0271 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x + 2 + k(x^2 + y^2 - 2x - 8y + 4) = 0$$

(단, $k \neq -1$) ㉠

이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$-3 + 3k = 0 \quad \therefore k = 1$$

$k = 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 6x + 2 + (x^2 + y^2 - 2x - 8y + 4) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$$

따라서 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

답 5π

0272 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6y + 4 + k(x^2 + y^2 + ax - 4y + 2) = 0$$

(단, $k \neq -1$) ㉠

이 원이 원점을 지나므로

$$4 + 2k = 0 \quad \therefore k = -2$$

$k = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 6y + 4 - 2(x^2 + y^2 + ax - 4y + 2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2ax - 2y = 0$$

$$\therefore (x+a)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 1$$

이 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2 + 1}$ 이고 넓이가 10π 이므로

$$\pi \times (\sqrt{a^2 + 1})^2 = 10\pi, \quad a^2 + 1 = 10, \quad a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

답 3

0273 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 + k(x^2 + y^2 + 4x - 8y - 14) = 0$$

(단, $k \neq -1$)

$$\therefore (1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (4k-8)x$$

$$+ (4-8k)y - 8 - 14k$$

$$= 0$$

..... ㉠

이 원의 중심이 y 축 위에 있으므로 중심의 x 좌표는 0이다.

즉 ㉠의 x 의 계수가 0이므로

$$4k - 8 = 0 \quad \therefore k = 2$$

$k = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $3x^2 + 3y^2 - 12y - 36 = 0$

$$\therefore x^2 + (y-2)^2 = 16$$

따라서 원의 반지름의 길이가 4이므로 둘레의 길이는

$$2\pi \times 4 = 8\pi$$

답 8π

0274 점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P 는 원 위의 점이므로

$$(a+2)^2 + (b+1)^2 = 4$$

..... ㉠

선분 AP 의 중점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+2}{2}, y = \frac{b+1}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 2, b = 2y + 1$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(2x)^2 + (2y+2)^2 = 4 \quad \therefore x^2 + (y+1)^2 = 1$$

따라서 선분 AP의 중점이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0, -1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 1 = 2\pi \quad \text{답 } 2\pi$$

0275 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 16$ 에서

$$(x+3)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \quad \therefore (x+1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{답 } ③$$

0276 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \quad \therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$(x+2)^2 + y^2 = 9\{(x-2)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0 \quad \therefore \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원 위의 점이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH}$$

이때 $\overline{PH}$ 의 길이의 최댓값은 원의 반

지름의 길이인 $\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \{2 - (-2)\} \times \frac{3}{2} = 3 \quad \text{답 } ①$$

0277 오른쪽 그림과 같이 두 원

$$x^2 + y^2 = 9,$$

$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 1 = 0$ 의 중심을 각각 O, O', 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$ 과 $\overline{AB}$ 의 교점을 C라 하자.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 9 - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 1) = 0$$

$$\therefore 4x + 3y + 10 = 0$$

원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심 O(0, 0)과 공통인 현 사이의 거리는

$$\overline{OC} = \frac{|10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

직각삼각형 ACO에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

따라서 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AC} = 2\sqrt{5} \quad \text{답 } 2\sqrt{5}$$

0278 오른쪽 그림과 같이 두 원

$$x^2 + y^2 = 4, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$\overline{OO'}$ 과 $\overline{AB}$ 의 교점을 C라 하자.

이때 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{O'A} = \overline{O'B} = 2$ 이므로

$\square OAO'B$ 는 마름모이다.

한편 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 에서

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2) = 0$$

$$\therefore x + y - 1 = 0$$

원 O'의 중심 O'(1, 1)과 공통인 현 사이의 거리는

$$\overline{O'C} = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 O'AC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{O'A}^2 - \overline{O'C}^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

따라서 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AC} = \sqrt{14}$$

이때 $\overline{OO'} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 이므로

$$\square OAO'B = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OO'}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{2} = \sqrt{7} \quad \text{답 } \sqrt{7}$$

0279 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다. ... 1단계

오른쪽 그림과 같이 두 원

$$x^2 + y^2 = 5, (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

중심을 각각 O, O', 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$ 과 $\overline{AB}$ 의 교점을 C라 하자.

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 5 - (x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1) = 0$$

$$\therefore 2x + y + 3 = 0 \quad \dots 2단계$$

원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 중심 O(0, 0)과 공통인 현 사이의 거리는

$$\overline{OC} = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

직각삼각형 ACO에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \dots 3단계$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5} \pi \quad \dots 4단계$$

$$\text{답 } \frac{16}{5} \pi$$

	채점 요소	비율
1단계	공통인 현을 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알기	30 %
2단계	두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
3단계	AC의 길이 구하기	30 %
4단계	넓이가 최소인 원의 넓이 구하기	10 %

0280 오른쪽 그림과 같이 두 원

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 2k = 0 \text{의 중심을}$$

각각 O', O'' , 두 원의 교점을 A, B,

$\overline{O'O''}$ 과 $\overline{AB}$ 의 교점을 C라 하자.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

즉 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{O'A} = 3$

이때 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 $AO'C$ 에서

$$\overline{O'C} = \sqrt{\overline{O'A}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

한편 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 2k) = 0$$

$$\therefore 4x + 3y - 2 - k = 0$$

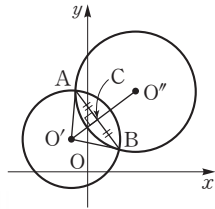
점 $O'(-1, 2)$ 와 공통인 현 사이의 거리는

$$\overline{O'C} = \frac{|-4 + 6 - 2 - k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|k|}{5}$$

$$\text{즉 } \frac{|k|}{5} = 2 \text{이므로 } |k| = 10$$

$$\therefore k = 10 \quad (\because k > 0)$$

답 ④



시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 044~047쪽

0281 원의 중심 (a, b) 가 직선 $y = x + 1$ 위에 있으므로

$$b = a + 1$$

..... ㉠

원의 방정식을

$$(x-a)^2 + (y-a-1)^2 = r^2$$

이라 하면 이 원이 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2 + (6-a-1)^2 = r^2, \quad (-3-a)^2 + (2-a-1)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 - 12a + 26 = r^2, \quad 2a^2 + 4a + 10 = r^2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 1, \quad r^2 = 16$$

$$a = 1 \text{을 ㉠에 대입하면 } b = 2$$

$$\therefore 2a + b = 4$$

답 ④

0282 $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 7 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 20$$

직선 $y = 2x + k$ 가 원 $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 20$ 의 둘레를 이등분

하려면 직선이 원의 중심 $(-2, -3)$ 을 지나야 하므로

$$-3 = -4 + k \quad \therefore k = 1$$

답 1

0283 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 에서

$$(x+m-1)^2 + (y-m)^2 = -m^2 - 2m + 3$$

이 방정식이 원의 방정식이 되려면

$$-m^2 - 2m + 3 > 0, \quad m^2 + 2m - 3 < 0$$

$$(m+3)(m-1) < 0$$

$$\therefore -3 < m < 1$$

따라서 정수 m 은 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

답 ③

0284 $x^2 + y^2 - 4x + a^2 - 4a - 1 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + y^2 = -a^2 + 4a + 5$$

이 방정식이 원을 나타내므로

$$-a^2 + 4a + 5 > 0$$

$$a^2 - 4a - 5 < 0, \quad (a+1)(a-5) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 5$$

이때 원의 넓이가 최대하려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고

$$-a^2 + 4a + 5 = -(a-2)^2 + 9$$

이므로 $-1 < a < 5$ 에서 $a = 2$ 일 때 반지름의 길이가 최대이다.

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{9} = 3$ 이다.

답 3

0285 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2$$

$$-4a = 0 \quad \therefore a = 0$$

$\overline{PB} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(a+1)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b-5)^2$$

$$a + b = 4 \quad \therefore b = 4$$

즉 원의 중심은 $P(0, 4)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 방정식은

$$x^2 + (y-4)^2 = 10$$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 4)$ 이다. (참)

ㄴ. $0 + (3-4)^2 = 1 \neq 10$ 이므로 점 $(0, 3)$ 을 지나지 않는다.

(거짓)

ㄷ. 넓이는 10π 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0286 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 10 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 15$$

중심의 좌표가 $(-2, 1)$ 이고 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는

1이므로 이 원의 넓이는

$$\pi \times 1^2 = \pi \quad \therefore a = 1$$

또 중심의 좌표가 $(-2, 1)$ 이고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는

$|-2| = 2$ 이므로 이 원의 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore a - b = -3$$

답 -3

0287 점 $(4, -2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제 4 사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이다.

따라서 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$

이 원이 점 $(4, -2)$ 를 지나므로

$$(4-r)^2 + (-2+r)^2 = r^2, \quad r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$(r-2)(r-10) = 0$$

$$\therefore r=2 \text{ 또는 } r=10$$

즉 두 원의 반지름의 길이의 합은 $2+10=12$ 답 ④

0288 점 $A(-4, a)$ 와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-4)^2 + a^2} = \sqrt{16 + a^2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{16 + a^2} - 2$$

즉 $\sqrt{16 + a^2} - 2 = 3$ 이므로 $\sqrt{16 + a^2} = 5$

양변을 제곱하면 $16 + a^2 = 25$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

답 ③

0289 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 에서 $x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ 에서 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$

두 원의 중심 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 1, 2

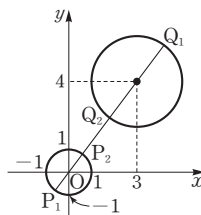
이므로 오른쪽 그림에서

$$M = \overline{P_1 Q_1} = 1 + 5 + 2 = 8$$

$$m = \overline{P_2 Q_2} = 5 - 1 - 2 = 2$$

$$\therefore M - m = 6$$

답 ③



0290 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

원의 중심 $(1, 2)$ 와 직선 $y = x + k$, 즉 $x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-2+k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} < 2, \quad |k-1| < 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} < k-1 < 2\sqrt{2}$$

$$\therefore 1-2\sqrt{2} < k < 1+2\sqrt{2}$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다. 답 ④

0291 원의 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(t, 2t)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심과 두 직선 $x+2y-3=0$, $x+2y-7=0$ 사이의 거리가 모두 원의 반지름의 길이 r 와 같으므로

$$\frac{|t+4t-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|t+4t-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = r$$

$$\therefore \frac{|5t-3|}{\sqrt{5}} = \frac{|5t-7|}{\sqrt{5}} = r \quad \dots\dots ①$$

즉 $|5t-3| = |5t-7|$ 이므로 $5t-3 = \pm(5t-7)$

그런데 $5t-3 \neq 5t-7$ 이므로

$$5t-3 = -5t+7 \quad \therefore t=1$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(1, 2)$ 이므로

$$a=1, b=2$$

$t=1$ 을 ①에 대입하면 $r = \frac{2}{\sqrt{5}}$

즉 원의 넓이는 $\pi \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}\pi \quad \therefore c = \frac{4}{5}$

$$\therefore a+b+5c=7$$

답 7

0292 $y=2x+k$ 를 $x^2+y^2=16$ 에 대입하여 정리하면

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 16 = 0$$

x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(k^2 - 16) = -k^2 + 80$$

(i) $D > 0$, 즉 $-k^2 + 80 > 0$ 일 때

$$k^2 - 80 < 0 \quad \therefore -4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$$

따라서 $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$ 이면 교점은 2개이다.

(ii) $D = 0$, 즉 $-k^2 + 80 = 0$ 일 때

$$k^2 - 80 = 0 \quad \therefore k = \pm 4\sqrt{5}$$

따라서 $k = \pm 4\sqrt{5}$ 이면 교점은 1개이다.

(iii) $D < 0$, 즉 $-k^2 + 80 < 0$ 일 때

$$k^2 - 80 > 0 \quad \therefore k < -4\sqrt{5} \text{ 또는 } k > 4\sqrt{5}$$

따라서 $k < -4\sqrt{5}$ 또는 $k > 4\sqrt{5}$ 이면 교점은 0개이다.

이상에서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0293 직선 $x+y+k=0$ 과 원 $x^2+y^2=9$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 3보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}} < 3, \quad |k| < 3\sqrt{2}$$

$$\therefore -3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

한편 $x^2+y^2-8x-2ky+k^2=0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-k)^2 = 16$$

직선 $x+y+k=0$ 과 원 $(x-4)^2 + (y-k)^2 = 16$ 이 만나지 않으려면 직선과 원의 중심 $(4, k)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 4보다 커야 하므로

$$\frac{|4+k+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} > 4, \quad |k+2| > 2\sqrt{2}$$

$$k+2 < -2\sqrt{2} \text{ 또는 } k+2 > 2\sqrt{2}$$

$$\therefore k < -2-2\sqrt{2} \text{ 또는 } k > -2+2\sqrt{2} \quad \dots\dots ②$$

①, ②의 공통부분은 $-2+2\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$

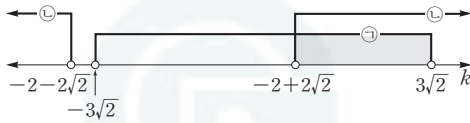
따라서 정수 k 는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4=10$$

답 10

참고 $-3\sqrt{2} - (-2-2\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} > 0$ 이므로
 $-3\sqrt{2} > -2-2\sqrt{2}$

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



0294 오른쪽 그림과 같이 원의 중심

을 $C(1, 1)$ 이라 하고 점 C에서

$\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 4$$

직각삼각형 AHC에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

따라서 원의 중심 $C(1, 1)$ 과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3, \quad |k| = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore k = 3\sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$

답 $3\sqrt{2}$

0295 원의 중심을 $C(1, 2)$ 라

하면 두 점 C, P 사이의 거리는

$$\overline{CP} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACP에서

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = 4$$

이때 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CP}$ 의 교점을 M이라 하면 $\overline{AB} \perp \overline{CP}$ 이므로 삼각형 ACP의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \overline{AM} \quad \therefore \overline{AM} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AM} = \frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

0296 원의 중심 $(3, 2)$ 와 직선 $2x-y+8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

이때 원의 반지름이 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원 위의 점과 직선 사이의

$$\text{거리의 최솟값은 } \frac{12\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

답 ①

0297 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$$

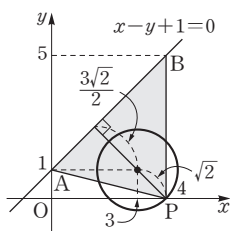
두 점 $A(0, 1)$, $B(4, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{5-1}{4-0}x$$

$$\therefore x-y+1=0$$

따라서 원의 중심 $(3, 1)$ 과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 PAB에서 $\overline{AB}$ 를 밑변으로 생각하면 높이의 최댓값은

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

또 $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = 10$$

답 10

0298 직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$ 의 기울기는 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이다.

원 $x^2+y^2=12$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm 2\sqrt{3} \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \quad \text{또는} \quad y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$$

$$\text{답 } y = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$$

0299 점 $A(a, 0)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = m(x-a) \quad \therefore mx - y - am = 0$$

원과 이 직선이 접하려면 원의 중심 $(-2, -2)$ 와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|-2m+2-am|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\therefore |(a+2)m-2| = \sqrt{10(m^2+1)}$$

양변을 제곱하면 $(a+2)^2 m^2 - 4(a+2)m + 4 = 10m^2 + 10$

$$\therefore (a^2+4a-6)m^2 - 4(a+2)m - 6 = 0$$

m 에 대한 이 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선의 기울기가 m_1, m_2 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1 m_2 = \frac{-6}{a^2+4a-6} = -1, \quad 6 = a^2+4a-6$$

$$a^2+4a-12=0, \quad (a+6)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

답 ①

0300 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분하므로 공통인 현의 중점은 두 원의 공통인 현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \text{에서} \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 - (x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$\therefore 4x - 2y + 5 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 두 원의 중심 $(-2, 1)$, $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = -1, y = \frac{1}{2}$

따라서 공통인 현의 중점의 좌표는

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right) \quad \text{답 } \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

0301 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - ax + 2ay + k(x^2 + y^2 - 6) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

..... ㉠

이 원이 두 점 (1, 1), (4, -2)를 지나므로

$$2 + a - 4k = 0, \quad 20 - 8a + 14k = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, k = 2$

$a = 6, k = 2$ 를 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 6x + 12y + 2(x^2 + y^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

따라서 $A = -2, B = 4, C = -4$ 이므로

$$A - B - C = -2$$

답 ②

0302 $\overline{PA} : \overline{PB} = 3 : 2$ 에서

$$2\overline{PA} = 3\overline{PB} \quad \therefore 4\overline{PA}^2 = 9\overline{PB}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$4\{(x+4)^2 + y^2\} = 9\{(x-1)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 11 = 0 \quad \therefore (x-5)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 (5, 0)이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 6 = 12\pi$$

답 12π

0303 오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2 + y^2 = 4, (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 의 중심을 각각 O, O', OO'과 AB의 교점을 C라 하자.

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4) = 0$$

$$\therefore x - 2y = 0$$

원 O'의 중심 O'(-1, 2)와 공통인 현 사이의 거리는

$$\overline{O'C} = \frac{|-1-4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 O'AC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{O'A}^2 - \overline{O'C}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

따라서 공통인 현의 길이는 $\overline{AB} = 2\overline{AC} = 4$

$$\therefore \triangle O'AB = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{O'C} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

답 2√5

0304 점 (2, 3)을 중심으로 하고 y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

따라서 $a = -4, b = -6, c = 9$ 이므로

$$a + b + c = -1$$

..... ㉠

답 -1

채점 요소

비율

1단계 원의 방정식 구하기

70 %

2단계 $a + b + c$ 의 값 구하기

30 %

0305 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 (-3, 4)에서의 접선의 방정식은

$$-3x + 4y = 25 \quad \therefore 3x - 4y + 25 = 0$$

..... 1단계

이 직선이 원 C에 접하므로 원 C의 반지름의 길이는 원 C의 중심 (-6, 8)과 직선 $3x - 4y + 25 = 0$ 사이의 거리와 같다.

즉 원 C의 반지름의 길이는

$$\frac{|-18 - 32 + 25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

..... 2단계

따라서 원 C의 넓이는 $\pi \times 5^2 = 25\pi$

..... 3단계

답 25π

채점 요소

비율

1단계 접선의 방정식 구하기

30 %

2단계 원 C의 반지름의 길이 구하기

50 %

3단계 원 C의 넓이 구하기

20 %

0306 $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 + y^2 = 5$$

..... ㉠

원 $x^2 + y^2 - 2ax + 2y - 6 = 0$ 이 원 ㉠의 둘레를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉠의 중심 (-1, 0)을 지난다.

..... 1단계

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 - (x^2 + y^2 - 2ax + 2y - 6) = 0$$

$$\therefore (a+1)x - y + 1 = 0$$

..... 2단계

이 직선이 점 (-1, 0)을 지나므로

$$-(a+1) + 1 = 0 \quad \therefore a = 0$$

..... 3단계

답 0

채점 요소

비율

1단계 한 원이 다른 원의 둘레를 이등분하는 조건 알기

30 %

2단계 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기

50 %

3단계 a의 값 구하기

20 %

0307 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 + k(x^2 + y^2 - ax) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

..... ㉠

..... 1단계

이 원이 점 (0, 1)을 지나므로 $2 + k = 0 \quad \therefore k = -2$

$k = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 - 2(x^2 + y^2 - ax) = 0$$

$$x^2 + y^2 + (4-2a)x + 6y - 7 = 0$$

$$\therefore \{x + (2-a)\}^2 + (y+3)^2 = a^2 - 4a + 20$$

..... 2단계

이 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2 - 4a + 20}$ 이고 넓이가 32π 이므로

$$\pi \times (\sqrt{a^2 - 4a + 20})^2 = 32\pi, \quad a^2 - 4a + 20 = 32$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0, \quad (a+2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

..... 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 세우기	20 %
2단계 두 원의 교점과 점 (0, 1)을 지나는 원의 방정식 구하기	40 %
3단계 a의 값 구하기	40 %

0308 전략 원의 중심이 위치하는 사분면에 따라 경우를 나누어 반지름의 길이를 구한다.

주어진 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 r 라 하자.

(i) 원의 중심이 제1사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 (r, r) 이고 이 점이 원

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ 위에 있으므로

$$(r-1)^2 + (r-1)^2 = 18$$

$$(r-1)^2 = 9, \quad r-1 = \pm 3$$

$$\therefore r = 4 (\because r > 0)$$

따라서 원의 넓이는 $\pi \times 4^2 = 16\pi$

(ii) 원의 중심이 제2사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 $(-r, r)$ 이고 이 점이 원

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ 위에 있으므로

$$(-r-1)^2 + (r-1)^2 = 18$$

$$2r^2 + 2 = 18, \quad r^2 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} (\because r > 0)$$

따라서 원의 넓이는 $\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$

(iii) 원의 중심이 제3사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 $(-r, -r)$ 이고 이 점이 원

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ 위에 있으므로

$$(-r-1)^2 + (-r-1)^2 = 18$$

$$(r+1)^2 = 9, \quad r+1 = \pm 3$$

$$\therefore r = 2 (\because r > 0)$$

따라서 원의 넓이는 $\pi \times 2^2 = 4\pi$

(iv) 원의 중심이 제4사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 $(r, -r)$ 이고 이 점이 원

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ 위에 있으므로

$$(r-1)^2 + (-r-1)^2 = 18$$

$$2r^2 + 2 = 18, \quad r^2 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} (\because r > 0)$$

따라서 원의 넓이는 $\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$

이상에서 모든 원의 넓이의 합은

$$16\pi + 8\pi + 4\pi + 8\pi = 36\pi$$

답 36π

0309 전략 원의 중심의 y 좌표와 원의 중심과 직선 $y=mx$ 사이의 거리가 모두 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

중심이 제1사분면 위에 있고 반지름의 길이가 2인 원이 x 축에 접하므로 양수 a 에 대하여 이 원의 중심을 $C(a, 2)$ 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$$

한편 점 $P(a, 0)$ 에 대하여 직선 PQ 과 직선 OC 는 수직이고 직선 OC 의 기울기가 $\frac{2}{a}$

이므로 직선 PQ 의 기울기는 $-\frac{a}{2}$ 이다.

따라서 직선 PQ 의 방정식은

$$y = -\frac{a}{2}(x-a)$$

$$\therefore y = -\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{2}$$

즉 $R(0, \frac{a^2}{2})$ 이므로

$$\triangle ROP = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4}a^3$$

이때 삼각형 ROP 의 넓이가 16이므로 $\frac{1}{4}a^3 = 16$

$$a^3 - 64 = 0, \quad (a-4)(a^2 + 4a + 16) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a^2 + 4a + 16 > 0)$$

따라서 원의 중심 $C(4, 2)$ 와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2 \quad \therefore |2m-1| = \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $momo2000@hanmail.net$

$$4m^2 - 4m + 1 = m^2 + 1, \quad 3m^2 - 4m = 0$$

$$m(3m-4) = 0 \quad \therefore m = \frac{4}{3} (\because m > 0)$$

$$\therefore 60m = 60 \times \frac{4}{3} = 80$$

답 80

0310 전략 정사각형 $ABCD$ 를 좌표평면 위에 놓고 각 점의 좌표를 정한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB 를 x 축, 직선 AD 를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면

$$A(0, 0), B(6, 0),$$

$$C(6, 6), D(0, 6)$$

점 P 는 선분 BC 를 1:2로 내분하는 점 이므로 점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 6}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2} \right), \text{ 즉 } (6, 2)$$

따라서 직선 AP 의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \quad \therefore x - 3y = 0$$

원의 중심을 $E(3, 3)$ 이라 하고, 점 E 에서 직선 AP 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$EH = \frac{|3-9|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

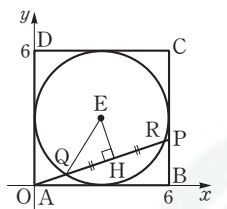
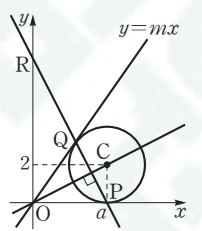
이때 한 변의 길이가 6인 정사각형 $ABCD$ 에 내접하는 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{EQ} = 3$

따라서 직각삼각형 EQH 에서

$$\overline{QH} = \sqrt{\overline{EQ}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \overline{QR} = 2\overline{QH} = \frac{6\sqrt{15}}{5}$$

답 $\frac{6\sqrt{15}}{5}$



04 도형의 이동

교과서 문제 정복하기

본책 049쪽, 051쪽

0311 $(-1+1, 0-1)$, 즉 $(0, -1)$ 답 $(0, -1)$

0312 $(3+1, 2-1)$, 즉 $(4, 1)$ 답 $(4, 1)$

0313 $(2+1, -2-1)$, 즉 $(3, -3)$ 답 $(3, -3)$

0314 $(-3+1, -5-1)$, 즉 $(-2, -6)$ 답 $(-2, -6)$

0315 $(3+2, 1-3)$, 즉 $(5, -2)$ 답 $(5, -2)$

momo2000@hanmail.net

0316 $(-1+2, 5-3)$, 즉 $(1, 2)$ 답 $(1, 2)$

0317 $(6+2, -2-3)$, 즉 $(8, -5)$ 답 $(8, -5)$

0318 $(10+2, 7-3)$, 즉 $(12, 4)$ 답 $(12, 4)$

0319 $x-4=4, y+6=5$ 이므로
 $x=8, y=-1$ $\therefore (8, -1)$ 답 $(8, -1)$

0320 $x-4=0, y+6=7$ 이므로
 $x=4, y=1$ $\therefore (4, 1)$ 답 $(4, 1)$

0321 $x-4=6, y+6=-8$ 이므로
 $x=10, y=-14$ $\therefore (10, -14)$ 답 $(10, -14)$

0322 $x-4=-3, y+6=-10$ 이므로
 $x=1, y=-16$ $\therefore (1, -16)$ 답 $(1, -16)$

0323 $-1+a=1, 1+b=-2$ 이므로
 $a=2, b=-3$ 답 $a=2, b=-3$

0324 $(x-3)-4(y+5)+3=0$
 $\therefore x-4y-20=0$ 답 $x-4y-20=0$

0325 $y+5=2(x-3)^2+5(x-3)+2$
 $\therefore y=2x^2-7x$ 답 $y=2x^2-7x$

0326 $\{(x-3)-2\}^2+\{(y+5)+1\}^2=6$
 $\therefore (x-5)^2+(y+6)^2=6$ 답 $(x-5)^2+(y+6)^2=6$

0327 $(x-3)+3(y+6)+5=0$
 $\therefore x+3y+20=0$ 답 $x+3y+20=0$

0328 $y+5=-(x+2)^2$
 $\therefore y=-x^2-4x-9$ 답 $y=-x^2-4x-9$

0329 $y+1=-2(x-2)-3$
 $\therefore y=-2x$ 답 $y=-2x$

0330 $y+1=-(x-2)^2+4$
 $\therefore y=-x^2+4x-1$ 답 $y=-x^2+4x-1$

0331 $\{(x-2)+2\}^2+\{(y+1)-1\}^2=1$
 $\therefore x^2+y^2=1$ 답 $x^2+y^2=1$

0332 주어진 직선을 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은
 $(x-5)+(y+4)-6=0$
 $\therefore x+y-7=0$ 답 $x+y-7=0$

0333 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 가 평행이동
 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은
 $\{(x-a)-1\}^2+\{(y-b)+2\}^2=5$
 $\therefore (x-a-1)^2+(y-b+2)^2=5$
 이 원이 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=5$ 와 일치하므로
 $-a-1=-5, -b+2=3$
 $\therefore a=4, b=-1$ 답 $a=4, b=-1$

다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 의 중심 $(1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원
 $(x-5)^2+(y+3)^2=5$ 의 중심 $(5, -3)$ 으로 옮겨지므로
 $1+a=5, -2+b=-3$
 $\therefore a=4, b=-1$

0334 답 (1) $(-1, -3)$ (2) $(1, 3)$
 (3) $(1, -3)$ (4) $(3, -1)$

0335 (1) $2x-(-y)+8=0$ $\therefore 2x+y+8=0$
 (2) $2 \times (-x)-y+8=0$ $\therefore 2x+y-8=0$
 (3) $2 \times (-x)-(-y)+8=0$ $\therefore 2x-y-8=0$
 (4) $2y-x+8=0$ $\therefore x-2y-8=0$
 답 (1) $2x+y+8=0$ (2) $2x+y-8=0$
 (3) $2x-y-8=0$ (4) $x-2y-8=0$

0336 (1) $-y=x^2-x+2$ $\therefore y=-x^2+x-2$
 (2) $y=(-x)^2-(-x)+2$ $\therefore y=x^2+x+2$
 (3) $-y=(-x)^2-(-x)+2$ $\therefore y=-x^2-x-2$
 답 (1) $y=-x^2+x-2$ (2) $y=x^2+x+2$
 (3) $y=-x^2-x-2$

0337 (1) $(x+1)^2 + (-y-5)^2 = 36$

$\therefore (x+1)^2 + (y+5)^2 = 36$

(2) $(-x+1)^2 + (y-5)^2 = 36$

$\therefore (x-1)^2 + (y-5)^2 = 36$

(3) $(-x+1)^2 + (-y-5)^2 = 36$

$\therefore (x-1)^2 + (y+5)^2 = 36$

(4) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 36$

답 (1) $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 36$

(2) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 36$

(3) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 36$

(4) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 36$

0338 $\left(\frac{-4+8}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$, 즉 (2, 5)

답 (2, 5)

0339 $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{-2-10}{2}\right)$, 즉 (5, -6)

답 (5, -6)

0340 $\left(\frac{-5-9}{2}, \frac{9+5}{2}\right)$, 즉 (-7, 7)

답 (-7, 7)

0341 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{1+a}{2} = -2, \frac{4+b}{2} = 2 \quad \therefore a = -5, b = 0$

따라서 구하는 점의 좌표는

(-5, 0)

답 (-5, 0)

0342 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{-2+a}{2} = 1, \frac{-5+b}{2} = -3 \quad \therefore a = 4, b = -1$

따라서 구하는 점의 좌표는

(4, -1)

답 (4, -1)

0343 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{3+a}{2} = 5, \frac{-6+b}{2} = -2 \quad \therefore a = 7, b = 2$

따라서 구하는 점의 좌표는

(7, 2)

답 (7, 2)

0344 (1) 원 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2$ 의 중심 (1, -3)을 점 (2, -2)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q)라 하면

$\frac{1+p}{2} = 2, \frac{-3+q}{2} = -2$

$\therefore p = 3, q = -1$

따라서 대칭이동한 점의 좌표는

(3, -1)

(2) 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 (3, -1)이고 대칭이동해둔 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$

답 (1) (3, -1) (2) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$

0345 (1) $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$

(2) $\frac{b+1}{a-3}$

(3) 선분 AB의 중점이 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$\frac{a+3}{2} - \frac{b-1}{2} + 1 = 0$

$\therefore a-b = -6$

..... ㉠

또 직선 AB가 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$ 과 수직이므로

$\frac{b+1}{a-3} = -1 \quad \therefore a+b = 2$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 4$

따라서 점 B의 좌표는 (-2, 4)

답 (1) $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$ (2) $\frac{b+1}{a-3}$ (3) (-2, 4)

0346 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 이 직선 $y = -x$

위의 점이므로 $\frac{y+y'}{2} = -\frac{x+x'}{2}$

$\therefore x+y = \text{㉠} - x' - y'$

..... ㉠

직선 PP'과 직선 $y = -x$ 가 수직이므로 $\frac{y'-y}{x'-x} = 1$

$\therefore x-y = \text{㉡} x' - y'$

..... ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x = -2y' \quad \therefore y' = \text{㉢} - x$

㉠-㉡을 하면 $2y = -2x' \quad \therefore x' = \text{㉣} - y$

$\therefore P'(\text{㉣} - y, \text{㉢} - x)$

답 ㉠ $-x' - y'$ ㉡ $x' - y'$ ㉢ $-x$ ㉣ $-y$

유형 익히기

• 본책 052~058쪽

0347 점 (-3, 2)를 점 (1, -4)로 옮기는 평행이동을 $(x, y) \rightarrow (x+m, y+n)$ 이라 하면

$-3+m = 1, 2+n = -4$

$\therefore m = 4, n = -6$

따라서 이 평행이동에 의하여 점 (5, -2)로 옮겨지는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$a+4 = 5, b-6 = -2$

$\therefore a = 1, b = 4$

즉 구하는 점의 좌표는 (1, 4)이다.

답 (1, 4)

0348 점 (-1, 3)이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-1-3, 3+2)$, 즉 (-4, 5)

이 점이 직선 $y = mx - 7$ 위의 점이므로

$5 = -4m - 7 \quad \therefore m = -3$

답 ②

0349 주어진 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$ 이라 하면

$$-2+m=1, a+n=4, b+m=5, 6+n=10$$

$$\therefore m=3, n=4, a=0, b=2$$

따라서 점 $(a+b, a-b)$, 즉 $(2, -2)$ 가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(2+3, -2+4), \text{ 즉 } (5, 2) \quad \text{답 (5, 2)}$$

momo2000@hanmail.net

0350 점 A $(-1, 7)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$$(-1+a, 7+3), \text{ 즉 } (a-1, 10)$$

이때 $\overline{OB}=2\overline{OA}$ 에서 $\overline{OB}^2=4\overline{OA}^2$ 이므로

$$(a-1)^2+10^2=4\{(-1)^2+7^2\}$$

$$a^2-2a-99=0, \quad (a+9)(a-11)=0$$

$$\therefore a=11 \quad (\because a>0) \quad \text{답 11}$$

0351 직선 $ax-2y-a+1=0$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$a(x-4)-2(y-n)-a+1=0$$

$$\therefore ax-2y-5a+2n+1=0$$

이 직선이 직선 $3x-2y-6=0$ 과 일치하므로

$$a=3, -5a+2n+1=-6$$

$$\therefore a=3, n=4 \quad \therefore a+n=7 \quad \text{답 ⑤}$$

0352 직선 $y=3x-2$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-3=3(x-k)-2$$

$$\therefore y=3x-3k+1$$

이 직선이 처음 직선과 일치하므로

$$-3k+1=-2 \quad \therefore k=1 \quad \text{답 1}$$

0353 주어진 평행이동에 의하여 점 $(2, 1)$ 이 점 $(3, 4)$ 로 옮겨지므로

$$2+a=3, 1+b=4 \quad \therefore a=1, b=3$$

따라서 직선 $3x-2y+4=0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-1)-2(y-3)+4=0$$

$$\therefore 3x-2y+7=0$$

이 직선이 점 $(3, c)$ 를 지나므로

$$9-2c+7=0 \quad \therefore c=8$$

$$\therefore a+b+c=12 \quad \text{답 12}$$

0354 직선 $y=x-3$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+2=(x-m)-3$$

$$\therefore y=x-m-5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \textcircled{1}\text{단계}$$

직선 $y=-x-1$ 을 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-n=-x-1$$

$$\therefore y=-x+n-1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots \textcircled{2}\text{단계}$$

이때 두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 모두 점 $(4, -2)$ 를 지나므로

$$-2=4-m-5, -2=-4+n-1$$

$$\therefore m=1, n=3$$

$$\therefore m+n=4 \quad \dots \textcircled{3}\text{단계}$$

답 4

채점 요소		비율
1단계	직선 $y=x-3$ 을 평행이동한 직선의 방정식 구하기	30 %
2단계	직선 $y=-x-1$ 을 평행이동한 직선의 방정식 구하기	30 %
3단계	$m+n$ 의 값 구하기	40 %

0355 주어진 평행이동에 의하여 원 $(x-3)^2+y^2=1$ 이 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x-a-3)^2+(y+b)^2=1$$

이 원이 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, 즉

$$(x+1)^2+(y-2)^2=1 \text{과 일치하므로}$$

$$-a-3=1, b=-2 \quad \therefore a=-4, b=-2$$

$$\therefore ab=8 \quad \text{답 8}$$

다른 풀이 원 $(x-3)^2+y^2=1$ 의 중심의 좌표는

$$(3, 0)$$

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, 즉 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 의 중심의 좌표는

$$(-1, 2)$$

따라서 $3+a=-1, 0-b=2$ 이므로

$$a=-4, b=-2$$

0356 $x^2+y^2+ax+by+5=0$ 에서

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-5$$

이 원을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$\left(x-3+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-2+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-5 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편 $x^2+y^2-6y+c=0$ 에서

$$x^2+(y-3)^2=9-c$$

이 원이 원 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$-3+\frac{a}{2}=0, -2+\frac{b}{2}=-3, \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-5=9-c$$

$$\therefore a=6, b=-2, c=4$$

$$\therefore a+b+c=8 \quad \text{답 8}$$

0357 원점을 점 $(2, 1)$ 로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+6x+1$, 즉 $y=(x+3)^2-8$ 이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y-1=(x-2+3)^2-8$$

$$\therefore y=(x+1)^2-7$$

따라서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -7)$ 이므로

$$m=-1, n=-7$$

$$\therefore m+n=-8$$

답 -8

다른 풀이 $y=x^2+6x+1=(x+3)^2-8$
 이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -8)$
 주어진 평행이동에 의하여 점 $(-3, -8)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-3+2, -8+1), \text{ 즉 } (-1, -7)$$

$$\therefore m=-1, n=-7$$

0358 포물선 $y=4x^2+8x-5$, 즉 $y=4(x+1)^2-9$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $a+2$ 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-a-2=4(x-a+1)^2-9$$

$$\therefore y=4(x-a+1)^2+a-7$$

이 포물선의 꼭짓점 $(a-1, a-7)$ 이 x 축 위에 있으므로

$$a-7=0 \quad \therefore a=7$$

따라서 꼭짓점의 x 좌표는

$$7-1=6$$

답 6

0359 직선 $y=3x-1$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-2a=3(x-a)-1 \quad \therefore y=3x-a-1$$

이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(1, -2)$ 를 지나야 하므로

$$-2=3-a-1 \quad \therefore a=4$$

답 4

0360 원 $x^2+y^2=1$ 을 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$x^2+(y-a)^2=1$$

이 원이 직선 $4x+3y+2=0$ 과 접하려면 원의 중심 $(0, a)$ 와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|3a+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, \quad |3a+2|=5$$

$$3a+2=\pm 5 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$$

답 1

0361 주어진 평행이동에 의하여 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=16$ 이 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x-a+2)^2+(y-b-3)^2=16$$

이 원의 중심이 제1사분면 위에 있고, 원이 x 축과 y 축에 모두 접하므로

$$a-2=4, b+3=4 \quad \therefore a=6, b=1$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

0362 이차함수 $y=-x^2-3x+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-b=-(x-a)^2-3(x-a)+1$$

$$\therefore y=-x^2+(2a-3)x-a^2+3a+b+1$$

이 그래프와 직선 $y=x+3$ 이 접하려면 방정식

$$-x^2+(2a-3)x-a^2+3a+b+1=x+3,$$

$$\text{ 즉 } x^2-2(a-2)x+a^2-3a-b+2=0$$

이 중근을 가져야 한다.

x 에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a^2-3a-b+2)=0$$

$$-a+b+2=0$$

$$\therefore a-b=2$$

답 2

0363 점 $P(2, -1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(-1, 2)$
 점 $P(2, -1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(2, 1)$
 따라서 삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2-1+2}{3}, \frac{-1+2+1}{3}\right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

답 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

0364 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$$b=3a$$

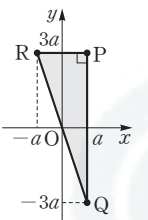
점 $P(a, 3a)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(a, -3a)$
 점 $P(a, 3a)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(-a, 3a)$
 따라서 오른쪽 그림에서

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6a \times 2a = 6a^2$$

즉 $6a^2=54$ 이므로 $a^2=9$
 $\therefore a=3 (\because a>0)$

답 3



0365 점 (a, b) 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, b)$
 이 점이 제3사분면 위의 점이므로 $-a<0, b<0$
 $\therefore a>0, b<0$
 점 $(a-b, ab)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a+b, -ab)$
 이 점을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a-b, -ab)$
 이때 $a>0, b<0$ 이므로 $a-b>0, -ab>0$
 따라서 점 $(a-b, -ab)$ 는 제1사분면 위에 있다.

답 제1사분면

0366 $(-2, -1) \xrightarrow{(가)} (-2, 1)$

$\xrightarrow{(나)} (2, -1) \xrightarrow{(다)} (-2, -1)$

즉 점 P를 (가), (나), (다)의 순서로 이동하면 처음의 위치로 돌아온다.

따라서 점 P를 99번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-2, -1)$ 이므로 100번 이동한 후의 점의 좌표는

$(-2, 1)$

즉 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a - b = -3$

답 -3

RPM비법노트

음이 아닌 정수 k 에 대하여 점 P를

(i) $(3k+1)$ 번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-2, 1)$

(ii) $(3k+2)$ 번 이동한 후의 점의 좌표는 $(2, -1)$

(iii) $(3k+3)$ 번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-2, -1)$

0367 직선 $y = \frac{1}{3}x + 2$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y = -\frac{1}{3}x + 2$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 기울기가 3이고 점 $(-6, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$y - 2 = 3\{x - (-6)\}$

$\therefore y = 3x + 20$

답 $y = 3x + 20$

0368 직선 $x + 5y - 6 = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 l_1 의 방정식은

$5x + y - 6 = 0$

직선 l_1 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2 의 방정식은

$-5x - y - 6 = 0 \quad \therefore y = -5x - 6$

따라서 직선 l_2 의 기울기는 -5 이다.

답 -5

0369 직선 $2x - 3y + k = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2x + 3y + k = 0$

이 직선이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$2 + 3 + k = 0 \quad \therefore k = -5$

답 ①

0370 중심이 점 $(3, -2)$ 이고 반지름의 길이가 k 인 원의 방정식은

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = k^2$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2 + (-y+2)^2 = k^2$

$\therefore (x-3)^2 + (y-2)^2 = k^2$

이 원이 점 $(3, -3)$ 을 지나므로

$(3-3)^2 + (-3-2)^2 = k^2$

$\therefore k = 5 \quad (\because k > 0)$

답 5

다른 풀이 점 $(3, -2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(3, 2)$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(3, 2)$ 이고 반지름의 길이가 k 이므로 이 원의 방정식은

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = k^2$

0371 $x^2 + y^2 - 2ax - 6y + 4 = 0$ 에서

$(x-a)^2 + (y-3)^2 = a^2 + 5$

이 원을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a)^2 + (y-3)^2 = a^2 + 5$

$\therefore (x+a)^2 + (y-3)^2 = a^2 + 5$

이 원의 중심 $(-a, 3)$ 이 직선 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 위에 있으므로

$3 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \quad \therefore a = 5$

답 ③

0372 포물선 $y = x^2 + ax + b$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y = (-x)^2 + a \times (-x) + b$

$\therefore y = -x^2 + ax - b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - b$

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} - b\right)$ 가 점 $(-2, 7)$ 과 일치하므로

$\frac{a}{2} = -2, \frac{a^2}{4} - b = 7 \quad \therefore a = -4, b = -3$

$\therefore a + b = -7$

답 ②

다른 풀이 점 $(-2, 7)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2, -7)$

따라서 포물선 $y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -7)$ 이므로 $y = (x-2)^2 - 7 = x^2 - 4x - 3$ 에서

$a = -4, b = -3$

0373 $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 5 = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 34$

이 원을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 34$

$x = 0$ 을 대입하면 $(0+5)^2 + (y-2)^2 = 34$

$y^2 - 4y - 5 = 0, (y+1)(y-5) = 0$

$\therefore y = -1$ 또는 $y = 5$

따라서 y 축과 만나는 두 점의 좌표는 $(0, -1), (0, 5)$ 이므로 두 점 사이의 거리는 $5 - (-1) = 6$

답 6

0374 직선 $4x + 3y + a = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-4x - 3y + a = 0 \quad \therefore 4x + 3y - a = 0$

이 직선이 원 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$ 에 접하려면 원의 중심

$(3, -1)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같아야

하므로 $\frac{|12 - 3 - a|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3, |9 - a| = 15$

$9 - a = \pm 15 \quad \therefore a = 24 \quad (\because a > 0)$

답 ④

0375 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(-y-1)^2=5$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5 \quad \dots \text{1단계}$$

이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(2, -1)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 보다 작아야 하므로

$$\frac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < \sqrt{5}, \quad |k+3| < \sqrt{10}$$

$$-\sqrt{10} < k+3 < \sqrt{10}$$

$$\therefore -3-\sqrt{10} < k < -3+\sqrt{10} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\text{답 } -3-\sqrt{10} < k < -3+\sqrt{10}$$

채점 요소		비율
1단계	대칭이동한 원의 방정식 구하기	40 %
2단계	k 의 값의 범위 구하기	60 %

0376 직선 $3x-2y+2=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-2x+3y+2=0 \quad \therefore 2x-3y-2=0$$

이 직선이 포물선 $y=\frac{1}{3}x^2+k$ 와 만나려면 방정식

$$2x-3\left(\frac{1}{3}x^2+k\right)-2=0, \text{ 즉 } x^2-2x+3k+2=0$$

이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (3k+2) \geq 0, \quad -3k-1 \geq 0$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{3} \quad \text{답 } k \leq -\frac{1}{3}$$

0377 원 $(x-a)^2+(y+1)^2=9$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-a)^2+(y+1)^2=9$$

$$\therefore (x+a)^2+(y+1)^2=9$$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+a)^2=9$$

이 원의 넓이가 직선 $3x-2y-1=0$ 에 의하여 이등분되려면 직선이 원의 중심 $(-1, -a)$ 를 지나야 하므로

$$-3+2a-1=0 \quad \therefore a=2 \quad \text{답 } 2$$

0378 포물선 $y=x^2+x+a$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+1=(x-2)^2+(x-2)+a$$

$$\therefore y=x^2-3x+a+1$$

이 포물선을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2-3x+a+1 \quad \therefore y=-x^2+3x-a-1$$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+3x+6$ 과 겹쳐지므로

$$-a-1=6 \quad \therefore a=-7 \quad \text{답 } -7$$

0379 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+1, b+2)$$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a-1, -b-2)$$

이 점이 점 $(3, 2)$ 와 일치하므로

$$-a-1=3, \quad -b-2=2$$

$$\therefore a=-4, \quad b=-4$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-4, -4)$ 이다. 답 $(-4, -4)$

0380 원 $(x+2)^2+(y+2)^2=16$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1+2)^2+(y+2)^2=16$$

$$\therefore (x+3)^2+(y+2)^2=16$$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y+3)^2=16$$

$y=0$ 을 대입하면 $(x+2)^2+3^2=16$

$$(x+2)^2=7, \quad x+2=\pm\sqrt{7}$$

$$\therefore x=-2+\sqrt{7} \text{ 또는 } x=-2-\sqrt{7}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2+\sqrt{7}, 0), (-2-\sqrt{7}, 0)$ 이므로

$$\overline{PQ} = -2+\sqrt{7} - (-2-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \quad \text{답 } 2\sqrt{7}$$

0381 직선 $x-2y+1=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-x-2y+1=0 \quad \therefore x+2y-1=0$$

이 직선을 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$x+2(y-m)-1=0$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + m + \frac{1}{2}$$

이 직선과 직선 $nx+y-2=0$, 즉 $y=-nx+2$ 가 y 축에서 수직으로 만나므로

$$-\frac{1}{2} \times (-n) = -1, \quad m + \frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore m = \frac{3}{2}, \quad n = -2$$

$$\therefore mn = -3 \quad \text{답 } ②$$

0382 점 A(1, 2)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(2, 1)$$

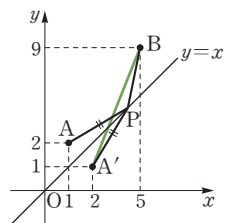
이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP}$$

$$= \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(5-2)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{73} \quad \text{답 } \sqrt{73}$$



0383 점 A(3, 4)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(-3, 4)$$

점 B(4, 3)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$B'(4, -3)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(4+3)^2 + (-3-4)^2} \\ &= 7\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $7\sqrt{2}$

0384 점 B(-3, 7)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$B'(3, 7)$$

$\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(3+5)^2 + (7-1)^2} \\ &= 10\end{aligned}$$

이때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AB'과 y축의 교점이다.

두 점 A(-5, 1), B'(3, 7)을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}y-1 &= \frac{7-1}{3-(-5)}\{x-(-5)\} \\ \therefore y &= \frac{3}{4}x + \frac{19}{4}\end{aligned}$$

따라서 직선 AB'의 y절편이 $\frac{19}{4}$ 이므로 구하는 점 P의 좌표는

$(0, \frac{19}{4})$ 이다. **답** 최솟값: 10, P(0, $\frac{19}{4}$)

0385 점 A(2, 4)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

$$A'(-2, 4), A''(4, 2)$$

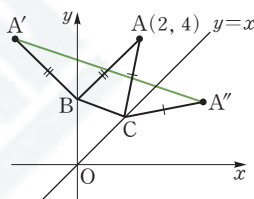
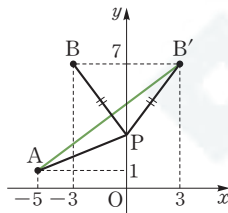
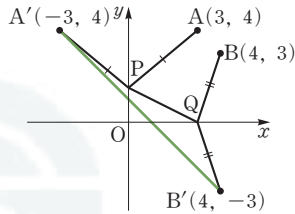
$\overline{AB} = \overline{A'B}$, $\overline{CA} = \overline{CA''}$ 이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &= \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CA''} \\ &\geq \overline{A'A''} \\ &= \sqrt{(4+2)^2 + (2-4)^2} \\ &= 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이므로

$$a=2\sqrt{10}$$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 B, C는 각각 직선 A'A''과 y축, 직선 $y=x$ 의 교점이다.



직선 A'A''의 방정식은

$$\begin{aligned}y-2 &= \frac{2-4}{4-(-2)}(x-4) \\ \therefore y &= -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\end{aligned}$$

따라서 직선 A'A''의 y절편이 $\frac{10}{3}$ 이므로

$$B(0, \frac{10}{3}) \quad \therefore b = \frac{10}{3}$$

또 $-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} = x$ 에서

$$-\frac{4}{3}x = -\frac{10}{3} \quad \therefore x = \frac{5}{2}$$

즉 C($\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$)이므로 $c = \frac{5}{2}$

$$\therefore abc = 2\sqrt{10} \times \frac{10}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{50\sqrt{10}}{3}$$

답 $\frac{50\sqrt{10}}{3}$

0386 두 점 (a, 8), (-6, b)를 이은 선분의 중점의 좌표가 (-4, 6)이므로

$$\frac{a-6}{2} = -4, \frac{8+b}{2} = 6 \quad \therefore a = -2, b = 4$$

$$\therefore ab = -8$$

답 ④

0387 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

원의 중심 (1, -3)을 점 (2, 1)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{1+a}{2} = 2, \frac{-3+b}{2} = 1$$

$$\therefore a = 3, b = 5$$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 점 (3, 5)이고 반지름의 길이가 3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$$

답 ①

0388 $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ 이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (1, 2)

$y = -x^2 + 6x - 5 = -(x-3)^2 + 4$ 이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (3, 4)

두 포물선이 점 P에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이다.

따라서 점 P는 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이므로 점 P의 좌표는

$$(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}), \text{ 즉 } (2, 3)$$

답 (2, 3)

0389 (1) 두 점 (a, b), (p, q)를 이은 선분의 중점의 좌표가 (-2, -1)이므로

$$\frac{a+p}{2} = -2, \frac{b+q}{2} = -1$$

$$\therefore a = -p-4, b = -q-2$$

(2) 점 (a, b) 가 직선 $3x - y - 2 = 0$ 위의 점이므로

$$3a - b - 2 = 0$$

이 식에 $a = -p - 4$, $b = -q - 2$ 를 대입하면

$$3(-p - 4) - (-q - 2) - 2 = 0$$

$$\therefore 3p - q + 12 = 0$$

따라서 점 (p, q) 는 직선 $3x - y + 12 = 0$ 위의 점이므로 구하는 직선의 방정식은

$$3x - y + 12 = 0$$

$$\text{답 (1) } a = -p - 4, b = -q - 2 \quad (2) \quad 3x - y + 12 = 0$$

0390 두 점 $(-6, -1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점

$\left(\frac{-6+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$ 가 직선 $2x + y + 3 = 0$ 위의 점이므로

$$2 \times \frac{-6+a}{2} + \frac{-1+b}{2} + 3 = 0$$

$$\therefore 2a + b = 7$$

..... ㉠

또 두 점 $(-6, -1)$, (a, b) 를 지나는 직선이 직선

$2x + y + 3 = 0$, 즉 $y = -2x - 3$ 과 수직이므로

$$\frac{b - (-1)}{a - (-6)} \times (-2) = -1$$

$$\therefore a - 2b = -4$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 3$

$$\therefore a + b = 5$$

답 ⑤

0391 직선 l 의 방정식을 $y = ax + b$ 라 하자.

두 점 $P(1, 5)$, $Q(3, 3)$ 에 대하여 선분 PQ 의 중점

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(2, 4)$ 가 직선 l 위의 점이므로

$$4 = 2a + b$$

..... ㉠

또 직선 PQ 가 직선 l 과 수직이므로

$$\frac{3-5}{3-1} \times a = -1 \quad \therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 ㉠에 대입하면 $4 = 2 + b \quad \therefore b = 2$

따라서 직선 l 의 방정식은 $y = x + 2$

이때 직선 l 의 x 절편은 -2 , y 절편은 2 이므로 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

답 2

0392 원 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$ 의 중심 $(-2, -1)$ 을 직선 $y = x - 2$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하자.

두 점 $(-2, -1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점

$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$ 가 직선 $y = x - 2$ 위의 점이므로

$$\frac{-1+b}{2} = \frac{-2+a}{2} - 2 \quad \therefore a - b = 5 \quad \text{..... ㉠}$$

또 두 점 $(-2, -1)$, (a, b) 를 지나는 직선이 직선 $y = x - 2$ 와 수직이므로

$$\frac{b - (-1)}{a - (-2)} \times 1 = -1 \quad \therefore a + b = -3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -4$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 점 $(1, -4)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 5 \quad \text{답 } (x-1)^2 + (y+4)^2 = 5$$

0393 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(2, -4)$ 이고 두 원의 중심을 이은 선분의 중점 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(1, -2)$ 가

직선 $ax + by + 5 = 0$ 위의 점이므로

$$a - 2b + 5 = 0$$

..... ㉠

... 1단계

또 두 점 $(0, 0)$, $(2, -4)$ 를 지나는 직선이 직선

$ax + by + 5 = 0$, 즉 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{5}{b}$ 와 수직이므로

$$\frac{-4}{2} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

$$\therefore b = -2a$$

..... ㉡

... 2단계

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 2$

$$\therefore a + b = 1$$

... 3단계

답 1

	채점 요소	비율
1단계	중점 조건을 이용하여 a, b 에 대한 식 세우기	40 %
2단계	수직 조건을 이용하여 a, b 에 대한 식 세우기	40 %
3단계	$a + b$ 의 값 구하기	20 %

0394 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은 방정식

$f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은 ④이다. **답 ④**

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$$x = 0, y = x, y = 1$$

..... ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠에 x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면

$$y = 0, x = y, x = 1$$

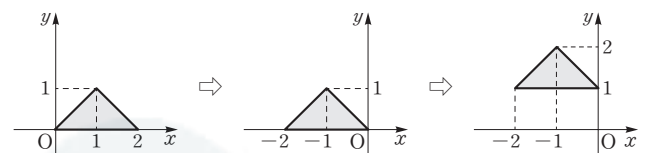
따라서 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은 세 직선 $y = 0$, $x = y$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형이므로 ④이다.

0395 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y) = 0$$

방정식 $f(-x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y-1) = 0$$



따라서 방정식 $f(-x, y-1) = 0$ 이 나타내는 도형은 ⑤이다.

답 ⑤

0396 주어진 그림에서 방정식 $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

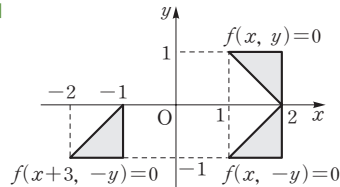
$$f(x, -y)=0$$

방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x+3, -y)=0$$

$$\therefore g(x, y)=f(x+3, -y) \quad \text{답 ③}$$

참고



시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 059~061쪽

0397 점 $(4, -1)$ 이 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y-2)$ 에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(4+a, -1-2), \text{ 즉 } (a+4, -3)$$

이 점이 점 $(2, b)$ 와 일치하므로

$$a+4=2, -3=b \quad \therefore a=-2, b=-3$$

$$\therefore a+b=-5 \quad \text{답 ①}$$

0398 직선 $y=3x-4$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+3=3(x-m)-4$$

$$\therefore 3x-y-3m-7=0 \quad \dots\dots ①$$

평행한 두 직선 ①, $y=3x-4$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로 직선 $y=3x-4$ 위의 점 $(0, -4)$ 와 직선 ① 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이다.

$$\therefore \frac{|4-3m-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10} \text{ 이므로}$$

$$|3m+3|=10, \quad 3m+3=\pm 10$$

$$\therefore m=\frac{7}{3} (\because m>0) \quad \text{답 ⑦}$$

0399 $x^2+y^2-4x+2y+a=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x+3-2)^2+(y-1+1)^2=5-a$$

$$\therefore (x+1)^2+y^2=5-a$$

따라서 중심의 좌표가 $(-1, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$ 이므로

$$b=0, \sqrt{5-a}=3 \quad \therefore a=-4, b=0$$

$$\therefore a+b=-4 \quad \text{답 ①}$$

0400 점 $A(-3, 5)$ 를 x 축에 대하여

대칭이동한 점은

$$B(-3, -5)$$

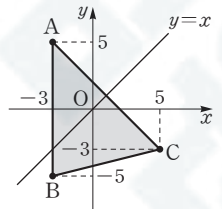
점 $A(-3, 5)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이동한 점은

$$C(5, -3)$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{5-(-5)\} \times \{5-(-3)\}=40$$



답 40

0401 $A_1(3, y_1), A_2(7, y_2) (y_1>0, y_2>0)$ 라 하면 두 점

A_1, A_2 는 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$$3^2+y_1^2=100 \text{ 에서 } y_1^2=91$$

$$\therefore y_1=\sqrt{91} (\because y_1>0)$$

$$7^2+y_2^2=100 \text{ 에서 } y_2^2=51$$

$$\therefore y_2=\sqrt{51} (\because y_2>0)$$

$$\therefore A_1(3, \sqrt{91}), A_2(7, \sqrt{51})$$

이때 $\angle A_1BC_1=90^\circ, \angle A_2BC_2=90^\circ$ 이므로 두 삼각형

A_1BC_1, A_2BC_2 는 빗변이 각각 A_1C_1, A_2C_2 인 직각삼각형이다.

따라서 두 선분 A_1C_1, A_2C_2 의 중점은 원의 중심인 원점이므로

두 점 A_1 과 C_1 , 두 점 A_2 와 C_2 는 각각 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore C_1(-3, -\sqrt{91}), C_2(-7, -\sqrt{51})$$

즉 $a=-\sqrt{91}, b=-7$ 이므로

$$a^2+b^2=140$$

답 140

0402 $\neg, x^2+y^2=1$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$x^2+y^2=1$$

$\neg, y=-x$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$x=-y \quad \therefore y=-x$$

$\cap, y=2x$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$x=2y \quad \therefore y=\frac{1}{2}x$$

이상에서 대칭이동하였을 때 처음의 도형과 일치하는 것은 $\neg,$

$\cap$ 이다.

답 ③

0403 직선 $y=2x+k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=-2x+k$$

$$\therefore 2x-y-k=0$$

이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=20$ 에 접하려면 원의 중심

$(1, -1)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$ 와 같아

야 하므로

$$\frac{|2+1-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}, \quad |k-3|=10$$

$$k-3=\pm 10$$

$$\therefore k=13 (\because k>0)$$

답 ⑤

0404 점 $(-2, 5)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(2, -5)$$

점 $(2, -5)$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(2+3, -5-2), \text{ 즉 } (5, -7)$$

점 $(5, -7)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-7, 5)$$

따라서 $a=-7, b=5$ 이므로

$$a-b=-12$$

답 -12

0405 오른쪽 그림과 같이 좌표평면을 잡고 다람쥐의 출발점의 위치를 A, 도착점의 위치를 B라 하면

$$A(0, 20), B(60, 40)$$

으로 놓을 수 있다.

이때 점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' , 점 B를 직선 $y=50$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$A'(0, -20), B'(60, 60)$$

또 다람쥐가 아래쪽 벽면에서 거쳐간 지점을 P, 위쪽 벽면에서 거쳐간 지점을 Q라 하면

$$\overline{AP}=\overline{A'P}, \overline{QB}=\overline{QB'}$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(60-0)^2+(60+20)^2}$$

$$=100$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 의 최솟값이 100이므로 다람쥐가 움직인 총거리는 100 m이다.

답 100 m

0406 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ 이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 2)$

점 $(-1, 2)$ 를 점 $(1, -1)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q) 라 하면

$$\frac{-1+p}{2}=1, \frac{2+q}{2}=-1$$

$$\therefore p=3, q=-4$$

따라서 포물선 $y=x^2+2x+3$ 을 점 $(1, -1)$ 에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(3, -4)$ 이다.

즉 $y=-x^2+ax+b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b$ 에서

$$\frac{a}{2}=3, \frac{a^2}{4}+b=-4 \quad \therefore a=6, b=-13$$

$$\therefore a+b=-7$$

답 ②

0407 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

$x^2+y^2-6x-12y+41=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y-6)^2=4$$

두 원의 중심 $(1, 2), (3, 6)$ 을 이은 선분의 중점

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(2, 4)$ 가 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$2a+b=4$$

..... ㉠

또 두 점 $(1, 2), (3, 6)$ 을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$ 와 수직이므로

$$\frac{6-2}{3-1} \times a = -1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$a=-\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면

$$-1+b=4 \quad \therefore b=5$$

$$\therefore a+b=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0408 점 $A(1, -2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은

$$B(-2, 1)$$

점 C의 좌표를 (p, q) 라 하면 선분 AC의 중점

$\left(\frac{1+p}{2}, \frac{-2+q}{2}\right)$ 가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$$\frac{-2+q}{2}=2 \times \frac{1+p}{2}$$

$$\therefore 2p-q=-4$$

..... ㉡

또 직선 AC와 직선 $y=2x$ 가 수직이므로

$$\frac{q-(-2)}{p-1} \times 2 = -1$$

$$\therefore p+2q=-3$$

..... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $p=-\frac{11}{5}, q=-\frac{2}{5}$

따라서 $C\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ 이므로

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(-\frac{11}{5}+2\right)^2+\left(-\frac{2}{5}-1\right)^2}=\sqrt{2}$$

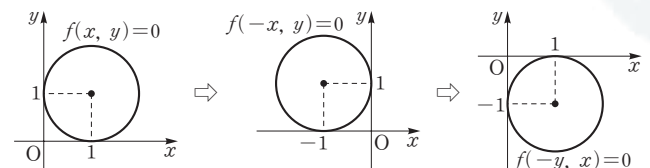
답 $\sqrt{2}$

0409 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y)=0$$

방정식 $f(-x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-y, x)=0$$



따라서 방정식 $f(-y, x)=0$ 이 나타내는 도형은 ①이다.

답 ①

다른 풀이 주어진 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

이 식에 x 대신 $-y, y$ 대신 x 를 대입하면

$$(-y-1)^2+(x-1)^2=1$$

$$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

따라서 방정식 $f(-y, x)=0$ 이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, -1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 ①이다.

0410 주어진 평행이동을 $(x, y) \rightarrow (x+m, y+n)$ 이라 하면

$$a+m=6, 3+n=-2, -2+m=1, b+n=4$$

$$\therefore m=3, n=-5, a=3, b=9 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 점 (b, a) , 즉 $(9, 3)$ 이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(9+3, 3-5), \text{ 즉 } (12, -2) \quad \dots \text{2단계}$$

답 (12, -2)

채점 요소	비율
1단계 주어진 평행이동과 a, b 의 값 구하기	60 %
2단계 점 (b, a) 가 옮겨지는 점의 좌표 구하기	40 %

0411 주어진 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2-2x$ 가 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y-1=(x+2)^2-2(x+2)$$

$$\therefore y=x^2+2x+1 \quad \text{momo2000@hanmail.net} \quad \dots \text{1단계}$$

이 포물선과 직선 $y=x+4$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2+2x+1=x+4, \text{ 즉 } x^2+x-3=0$$

의 두 실근이다.

이 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1 \quad \dots \text{2단계}$$

이때 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$A(\alpha, \alpha+4), B(\beta, \beta+4)$$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{(\alpha+4)+(\beta+4)}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) (\because \text{㉠})$$

\dots \text{3단계}

답 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

채점 요소	비율
1단계 평행이동한 포물선의 방정식 구하기	30 %
2단계 평행이동한 포물선과 직선의 교점의 x 좌표의 합 구하기	40 %
3단계 선분 AB의 중점의 좌표 구하기	30 %

0412 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=9$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+b)^2+(y+a)^2=9 \quad \dots \text{1단계}$$

이 원을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+2+b)^2+(y+a)^2=9 \quad \dots \text{2단계}$$

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|-2-b|=|-a|=3$$

$$|-2-b|=3 \text{에서 } -2-b=\pm 3$$

$$\therefore b=-5 \text{ 또는 } b=1$$

$$|-a|=3 \text{에서 } a=-3 \text{ 또는 } a=3 \quad \dots \text{3단계}$$

$$\text{따라서 } ab \text{의 최댓값은 } -5 \times (-3)=15 \quad \dots \text{4단계}$$

답 15

채점 요소	비율
1단계 대칭이동한 원의 방정식 구하기	20 %
2단계 평행이동한 원의 방정식 구하기	20 %
3단계 a, b 의 값 구하기	40 %
4단계 ab 의 최댓값 구하기	20 %

다른 풀이 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=9$ 의 중심의 좌표는

$$(-a, -b)$$

점 $(-a, -b)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-b, -a)$$

점 $(-b, -a)$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-b-2, -a)$$

따라서 중심의 좌표가 $(-b-2, -a)$ 이고 반지름의 길이가 3인

원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|-b-2|=|-a|=3$$

0413 점 Q의 좌표를 (a, b) , 점 R의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 Q는 선분 PR의 중점이므로

$$a=\frac{2+x}{2}, b=\frac{4+y}{2} \quad \dots \text{㉠} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 점 Q가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=1$$

$$\text{㉠을 대입하면 } \left(\frac{2+x}{2}\right)^2+\left(\frac{4+y}{2}\right)^2=1$$

$$\therefore (x+2)^2+(y+4)^2=4 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 점 R가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-2, -4)$ 이고

반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times 2^2=4\pi \quad \dots \text{3단계}$$

답 4\pi

채점 요소	비율
1단계 두 점 Q, R의 좌표 사이의 관계식 세우기	40 %
2단계 점 R가 나타내는 도형의 방정식 구하기	40 %
3단계 점 R가 나타내는 도형의 넓이 구하기	20 %

0414 **전략** p, q 를 각각 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\text{동전을 10번 던지므로 } a+b=10 \quad \therefore b=10-a$$

따라서 점 P를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 것을 a 번, x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것을 $(10-a)$ 번 실행한 점이 Q이다.

$$\therefore p=1+1 \times a+(-2) \times (10-a)=3a-19$$

$$q=2+(-1) \times a+2 \times (10-a)=-3a+22$$

이때 $\overline{PQ}=11\sqrt{2}$ 에서 $\overline{PQ}^2=242$ 이므로

$$\{(3a-19)-1\}^2+\{(-3a+22)-2\}^2=242$$

$$(3a-20)^2=121, \quad 3a-20=\pm 11$$

$$\therefore a=3 (\because a \text{는 음이 아닌 정수})$$

따라서 $b=7, p=-10, q=13$ 이므로

$$ab-pq=3 \times 7-(-10) \times 13=151$$

답 151

0415 전략 구하는 넓이와 사각형 ABDC의 넓이가 같음을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 직선

$3x+4y-6=0$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선을 l 이라 하면 원 C_2 와 직선 l 의 교점이 두 점 C, D이므로 현 AB와 호 AB로 둘러싸인 활꼴과 현 CD와 호 CD로 둘러싸인 활꼴이 합동이다.

즉 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 사각형 ABDC의 넓이와 같다.

이때 점 A의 좌표를 (p, q) 라 하면 점 C의 좌표는 $(p+3, q+4)$ 이므로 직선 AC의 기울기는

$$\frac{(q+4)-q}{(p+3)-p} = \frac{4}{3}$$

직선 $3x+4y-6=0$ 의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이므로 직선 AB와 직선 AC는 수직이다.

따라서 사각형 ABDC는 직사각형이고

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{\{(p+3)-p\}^2 + \{(q+4)-q\}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\end{aligned}$$

또 원 C_1 의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $3x+4y-6=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{6}{5}$$

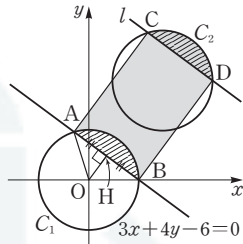
이므로 직각삼각형 AOH에서

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{8}{5} \\ \therefore \overline{AB} &= 2\overline{AH} = \frac{16}{5}\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\square ABDC = \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{16}{5} \times 5 = 16$$

답 16



0416 전략 점 A를 주어진 직선에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

점 A를 직선 $4x-6y+3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$ 라 하면 두 점 $A(1, -1)$, $A'(a, b)$ 를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$ 가 직선 $4x-6y+3=0$ 위의 점이므로

$$\begin{aligned}4 \times \frac{1+a}{2} - 6 \times \frac{-1+b}{2} + 3 &= 0 \\ \therefore 2a - 3b &= -8 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

또 두 점 $A(1, -1)$, $A'(a, b)$ 를 지나는 직선이 직선

$4x-6y+3=0$, 즉 $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ 과 수직이므로

$$\begin{aligned}\frac{b-(-1)}{a-1} \times \frac{2}{3} &= -1 \\ \therefore 3a + 2b &= 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -1$, $b = 2$

$$\therefore A'(-1, 2)$$

$\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PB} &= \overline{A'P} + \overline{PB} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= 3 - (-1) = 4 \\ \therefore k &= 4\end{aligned}$$

이때 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 값이 최소가 되도록

하는 점 P는 직선 $A'B$ 와 직선 $4x-6y+3=0$ 의 교점이다.

직선 $A'B$ 의 방정식은 $y = 2$

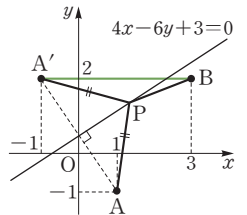
$y = 2$ 를 $4x-6y+3=0$ 에 대입하면

$$4x - 12 + 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{9}{4}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{4}, 2\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}s &= \frac{9}{4}, t = 2 \\ \therefore kst &= 4 \times \frac{9}{4} \times 2 = 18\end{aligned}$$

답 18



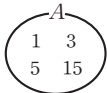
05 집합의 뜻과 포함 관계

교과서 문제 정복하기

본책 065쪽

0417 $\neg$, $\therefore$, ‘가까운’, ‘무거운’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 $\neg$, $\therefore$ 이다. 답 $\neg$, $\therefore$

0418 답 (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\notin$

0419 답 (1) $A = \{1, 3, 5, 15\}$
(2) $A = \{x | x \text{는 } 15 \text{의 양의 약수}\}$
(3) 

0420 1 이상 7 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로 주어진 집합은 유한집합이다. 답 유

0421 0 미만의 정수는 $-1, -2, -3, \dots$ 이므로 주어진 집합은 무한집합이다. 답 무

0422 2보다 작은 소수는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다. 답 유, 공
참고 공집합은 유한집합이다.

0423 답 3

0424 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ 이므로 $n(A) = 4$ 답 4

0425 답 $A \subset B$

0426 $A = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$, $B = \{8, 16, 24, 32, \dots\}$
이므로 $B \subset A$ 답 $B \subset A$

0427 답 (1) $\emptyset$ (2) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
(3) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ (4) $\{a, b, c\}$

0428 답 $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}$

0429 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면 $\{1, 2, 4\}$ 이므로 구하는 부분집합은
 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$
답 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$

0430 답 $A = B$

0431 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 에서 $(x+2)(x-4) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 4$
따라서 $A = \{-2, 4\}$ 이므로
 $A \neq B$ 답 $A \neq B$

0432 (1) $n(A) = 4$ 이므로 부분집합의 개수는
 $2^4 = 16$
(2) 진부분집합의 개수는
 $2^4 - 1 = 15$
(3) 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
 $2^{4-1} = 2^3 = 8$

답 (1) 16 (2) 15 (3) 8

유형 익히기

• 본책 066~072쪽

0433 ③ ‘큰’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ③

0434 ②, ④, ⑤ ‘맛있는’, ‘높은’, ‘작은’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ①, ③이다. 답 ①, ③

0435 $\neg$, $\therefore$, ‘아름다운’, ‘좋아하는’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 $\neg$, $\therefore$ 의 2개이다. 답 2

0436 $A = \{1, 3, 5\}$
① $0 \notin A$ ③ $4 \notin A$
④ $5 \in A$ ⑤ $7 \notin A$
따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0437 $A = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$
 $\neg$, $1 \in A$ (거짓)
 $\neg$, $3 \notin A$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\therefore$ 이다. 답 $\neg$, $\therefore$

0438 $x^3 - x^2 - 2x = 0$ 에서
 $x(x^2 - x - 2) = 0$, $x(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 $\therefore A = \{-1, 0, 2\}$
③ $1 \notin A$ 답 ③

0439 ① $\sqrt{4}=2$ 는 정수이므로 $\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$

② $\frac{5}{3}$ 는 유리수이므로 $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$

③ π 는 무리수이므로 $\pi \notin \mathbb{Q}$

④ $\sqrt{5}+1$ 은 실수이므로 $\sqrt{5}+1 \in \mathbb{R}$

⑤ $i^{100}=(i^4)^{25}=1$ 은 실수이므로 $i^{100} \in \mathbb{R}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

RPM 비법 노트

i의 거듭제곱

i^n (n 은 자연수)의 값은 $i, -1, -i, 1$ 이 이 순서대로 반복되므로 다음과 같은 규칙을 갖는다.

$$i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i, i^{4k+4}=1$$

(단, k 는 음이 아닌 정수이다.)

0440 ① $A=\{1, 2, 4, 8\}$

② $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

③ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

④ $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

⑤ $A=\{4, 8, 12, 16\}$

따라서 집합 A 를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0441 ①, ②, ④, ⑤ $\{3, 5, 7\}$

③ $\{2, 3, 5, 7\}$

따라서 원소가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

답 ③

0442 각각의 수를 소인수분해하면

① $20=2^2 \times 5$

② $40=2^3 \times 5$

③ $100=2^2 \times 5^2$

④ $150=2 \times 3 \times 5^2$

⑤ $250=2 \times 5^3$

따라서 집합 A 의 원소가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

0443 ① 무한집합

② $\{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

③ $\emptyset \Rightarrow$ 유한집합

④ $\{4, 8, 12, \dots, 96\} \Rightarrow$ 유한집합

⑤ $\{9, 11, 13, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

따라서 유한집합인 것은 ③, ④이다.

답 ③, ④

0444 ㄱ. $\{1, 2, 5, 10\} \Rightarrow$ 유한집합

ㄴ. $\{5, 10, 15, 20, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

ㄷ. $\emptyset \Rightarrow$ 유한집합

ㄹ. $\{\dots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

ㅁ. $\{6, 8, 10, 12, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

이상에서 무한집합인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.

답 ③

0445 집합 A 가 공집합이 되려면 이차부등식

$x^2-2kx-3k+10<0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재하지 않아야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2-2kx-3k+10 \geq 0$$

이 성립해야 한다.

즉 이차방정식 $x^2-2kx-3k+10=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-3k+10) \leq 0 \quad \dots \text{1단계}$$

$$k^2+3k-10 \leq 0, \quad (k+5)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq k \leq 2 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 정수 k 는 $-5, -4, \dots, 2$ 의 8개이다.

$\dots \text{3단계}$

답 8

	채점 요소	비율
1단계	k 에 대한 부등식 세우기	50 %
2단계	k 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	정수 k 의 개수 구하기	10 %

0446 $A=\{0, 1\}$ 이므로 $n(A)=2$

$B=\{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 $n(B)=4$

$$\therefore n(A)+n(B)=6$$

답 6

0447 ② $B=\{2\}$ 이면 $n(B)=1$

⑤ $E=\{1, 5, 25\}$ 이므로 $n(E)=3$

답 ②

0448 $A=\{1, 2, 3\}$,

$B=\{1, 3, 9\}$ 에 대하여

$x \in A, y \in B$ 일 때, xy 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$$C=\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$$

따라서 $n(A)=3, n(B)=3, n(C)=7$ 이므로

$$n(A)+n(B)-n(C)=-1$$

답 -1

$x \backslash y$	1	3	9
1	1	3	9
2	2	6	18
3	3	9	27

0449 $A=\{(2, 4), (5, 3), (8, 2), (11, 1)\}$ 이므로

$$n(A)=4$$

$\dots \text{1단계}$

$B=\{1, 2, 3, \dots, k\}$ 이므로 $n(B)=k$

이때 $n(A)+n(B)=10$ 이므로

$$4+k=10 \quad \therefore k=6$$

$\dots \text{2단계}$

답 6

	채점 요소	비율
1단계	$n(A)$ 구하기	50 %
2단계	k 의 값 구하기	50 %

0450 ㄱ. a 는 집합 A 의 원소이므로 $a \in A$ (참)

ㄴ. $b \in A$ 또는 $\{b\} \subset A$ (거짓)

ㄷ. $c \in A$ 또는 $\{c\} \subset A$ (거짓)

ㄹ. $a \in A, b \in A, c \in A$ 이므로 $\{a, b, c\} \subset A$ (참)

ㅁ. 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로

$$A \subset \{a, b, c, d\} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0451 $B = \{1, 2, 3, 6\}$

① 0은 집합 A 의 원소가 아니므로 $0 \notin A$

② 3은 집합 B 의 원소이므로 $3 \in B$

③ $1 \in A, 3 \in A$ 이므로 $\{1, 3\} \subset A$

④ $5 \notin B$ 이므로 $\{2, 5\} \not\subset B$

⑤ $4 \notin B$ 이므로 $\{1, 2, 4\} \not\subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0452 ① $1 \in A$ 또는 $\{1\} \subset A$

② $1 \in A, 2 \in A$ 이므로 $\{1, 2\} \subset A$

③ $2 \in A$ 또는 $\{2\} \subset A$

④ $\{1, 2\} \in A$ 이므로 $\{\{1, 2\}\} \subset A$

⑤ 집합 A 의 원소는 1, 2, $\{1, 2\}$ 의 3개이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

0453 ① $\emptyset$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A$

② $a \in A$ 이므로 $\{a\} \subset A$

③ b 는 집합 A 의 원소이므로 $b \in A$

④ $\emptyset \in A, b \in A$ 이므로 $\{\emptyset, b\} \subset A$

⑤ $\{a, c\} \in A$ 이므로 $\{\{a, c\}\} \subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0454 $A = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 $x \in A, y \in A$ 일 때, xy 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$$B = \{0, 1, 2, 4\}$$

또 $x \in A, y \in A$ 일 때, $x+2y$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는

$$A \subset B \subset C$$

답 ①

0455 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$$x^2 - 2x = 0 \text{에서}$$

$$x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore C = \{0, 2\}$$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는

$$C \subset A \subset B$$

답 ④

056 정답 및 풀이

0456 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B \subset A$ 이다.

① $A \subset B$

② $A \not\subset B, B \not\subset A$

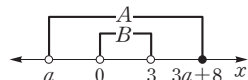
③ $A = \{10, 20, 30, 40, \dots\}, B = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ 이므로 $A \subset B$

④ $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 $A \subset B$

⑤ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 3, 5\}$ 이므로 $B \subset A$

답 ⑤

0457 $B \subset A$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $a \leq 0, 3a+8 \geq 3$ 이어야 하므로

$$-\frac{5}{3} \leq a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0$ 의 2개이다.

답 2

0458 $(x^2-9)(2x-a)=0$ 에서

$$(x+3)(x-3)(2x-a)=0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3 \text{ 또는 } x = \frac{a}{2}$$

$$\therefore A = \left\{-3, 3, \frac{a}{2}\right\}$$

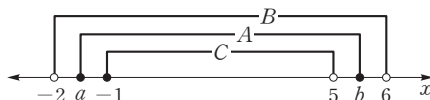
이때 $B = \{2, 3\}$ 이므로 $B \subset A$ 하려면 $2 \in A$ 이어야 한다.

즉 $2 = \frac{a}{2}$ 이므로

$$a = 4$$

답 4

0459 $C \subset A \subset B$ 가 성립하도록 세 집합 A, B, C 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-2 < a < -1, 5 \leq b < 6$ 이어야 하고 a, b 는 정수이므로

$$a = -1, b = 5$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

0460 $A \subset B$ 하려면 $2 \in B$ 이어야 하므로

$$a^2+1=2 \text{ 또는 } a-3=2$$

(i) $a^2+1=2$, 즉 $a=-1$ 또는 $a=1$ 일 때

$$a=-1 \text{ 이면 } A = \{1, 2\}, B = \{-4, 1, 2\} \text{ 이므로}$$

$$A \subset B$$

$$a=1 \text{ 이면 } A = \{-1, 2\}, B = \{-2, 1, 2\} \text{ 이므로}$$

$$A \not\subset B$$

(ii) $a-3=2$, 즉 $a=5$ 일 때

$$A = \{-5, 2\}, B = \{1, 2, 26\} \text{ 이므로}$$

$$A \not\subset B$$

(i), (ii)에서 $a = -1$

답 -1

0461 $A=\{1, 3, 9\}$ 에 대하여 $X \subset A$ 이고 $X \neq A$ 인 집합 X 는 집합 A 의 진부분집합이다.

따라서 집합 X 는

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$$

답 $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$

0462 $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$ 에 대하여 집합 X 는 원소가 2개인 집합 A 의 부분집합이므로

$$\{4, 8\}, \{4, 12\}, \{4, 16\}, \{4, 20\}, \{8, 12\}, \{8, 16\}, \{8, 20\}, \{12, 16\}, \{12, 20\}, \{16, 20\}$$

의 10개이다.

답 ③

다른 풀이 집합 X 의 개수는 집합 A 의 원소 5개 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_5C_2=10$

0463 (i) 원소가 1개인 경우

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\} \text{의 } 6 \text{개}$$

(ii) 원소가 2개인 경우

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\} \text{의 } 9 \text{개}$$

(iii) 원소가 3개인 경우

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\} \text{의 } 2 \text{개}$$

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$$6+9+2=17$$

답 ④

0464 $A=B$ 이라면 $4 \in B$ 이어야 하므로

$$b^2=4 \text{ 또는 } b^2-1=4$$

(i) $b^2=4$ 일 때, $b=2$ ($\because b$ 는 자연수)

$$\text{이때 } A=\{1, a, 4\}, B=\{1, 3, 4\} \text{이므로 } a=3$$

(ii) $b^2-1=4$ 일 때, 이를 만족시키는 자연수 b 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3, b=2$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

0465 $A=\{1, 4, 7, 10\}$

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A=B$ 이므로

$$a+1=7, b=10 \text{ 또는 } a+1=10, b=7$$

$$\therefore a=6, b=10 \text{ 또는 } a=9, b=7$$

그런데 $a > b$ 이므로 $a=9, b=7$

$$\therefore a-b=2$$

답 2

0466 $A=B$ 이라면 $5 \in A$ 이어야 한다.

$x^2-ax+10=0$ 에 $x=5$ 를 대입하면

$$25-5a+10=0 \quad \therefore a=7$$

... 1단계

따라서 $x^2-7x+10=0$ 에서 $(x-2)(x-5)=0$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=5$$

즉 $A=\{2, 5\}$ 이므로 $b=2$

... 2단계

$$\therefore ab=14$$

... 3단계

답 14

	채점 요소	비율
1단계	a 의 값 구하기	40%
2단계	b 의 값 구하기	40%
3단계	ab 의 값 구하기	20%

0467 $A=B$ 이므로

$$x+1=2x-1 \text{ 또는 } x+1=3x-2$$

(i) $x+1=2x-1$, 즉 $x=2$ 일 때

$$A=\{3, 4\}, B=\{3, 4\} \text{이므로 } A=B$$

(ii) $x+1=3x-2$, 즉 $x=\frac{3}{2}$ 일 때

$$A=\left\{\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right\}, B=\left\{2, \frac{5}{2}\right\} \text{이므로 } A \neq B$$

(i), (ii)에서 $x=2$

답 2

0468 $n(A)=a, n(B)=b$ 라 하면

$$2^a=128=2^7 \text{에서 } a=7$$

$$2^b-1=63 \text{에서 } 2^b=64=2^6 \quad \therefore b=6$$

$$\therefore n(A)-n(B)=1$$

답 ①

0469 $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$

따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는

$$2^5-1=31$$

답 31

0470 $x^2+x-6 < 0$ 에서 $(x+3)(x-2) < 0$

$$\therefore -3 < x < 2$$

$$\therefore A=\{-2, -1, 0, 1\}$$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^4=16$$

답 16

0471 집합 A 의 원소 중 5의 배수는

$$5, 10, 15, \dots, 50$$

따라서 조건을 만족시키는 집합은 $\{5, 10, 15, \dots, 50\}$ 의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는

$$2^{10}-1=1023$$

답 1023

0472 $A=\{1, 2, 7, 14\}$

집합 X 는 집합 A 의 진부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{4-1}-1=2^3-1=7$$

답 7

0473 집합 A 는 집합 S 의 부분집합 중에서 1은 반드시 원소로 갖고, 2, 5는 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 A 의 개수는

$$2^{5-1-2}=2^2=4$$

답 4

0474 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고, 3은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 8이므로

$$2^{n-2-1}=8, \quad 2^{n-3}=2^3$$

$$n-3=3 \quad \therefore n=6$$

답 6

0475 $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

집합 A 의 부분집합 중에서 짝수인 원소가 2개인 집합은 집합 A 의 짝수인 원소 6, 12, 18 중 6, 12 또는 6, 18 또는 12, 18만을 원소로 가져야 한다.

(i) 6, 12는 반드시 원소로 갖고, 18은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{6-2-1} = 2^3 = 8$$

(ii) 6, 18은 반드시 원소로 갖고, 12는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{6-2-1} = 2^3 = 8$$

(iii) 12, 18은 반드시 원소로 갖고, 6은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{6-2-1} = 2^3 = 8$$

이상에서 구하는 집합의 개수는

$$8 + 8 + 8 = 24$$

답 24

0476 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 에서 $(x+1)(x-3) = 0$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore A = \{-1, 3\}$$

$$|x| < 4 \text{에서 } -4 < x < 4$$

$$\therefore B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 $-1, 3$ 을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{7-2} = 2^5 = 32$$

답 4

0477 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{n-2} = 128 = 2^7$$

$$n - 2 = 7 \quad \therefore n = 9$$

답 9

0478 $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$... 1단계

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 2, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖는 집합에서 두 집합 A, B 를 제외한 것과 같으므로 집합 X 의 개수는

$$2^{10-4} - 2 = 2^6 - 2 = 64 - 2 = 62$$

... 2단계

답 62

채점 요소		비율
1단계	두 집합 A, B 를 원소나열법으로 나타내기	30 %
2단계	집합 X 의 개수 구하기	70 %

0479 $A = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$

집합 A 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 소수 7, 13, 19를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^6 - 2^{6-3} = 64 - 8 = 56$$

답 56

058 정답 및 풀이

참고 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 에 대하여 집합 A 의 특정한 원소 k ($k < n$)개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수

$$\Rightarrow 2^n - 2^{n-k}$$

0480 집합 A 의 부분집합 중에서 a 또는 c 를 원소로 갖는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 a 와 c 를 모두 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^6 - 2^{6-2} = 64 - 16 = 48$$

답 48

다른 풀이 집합 A 의 부분집합 중에서

a 를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{6-1} = 2^5 = 32$$

c 를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{6-1} = 2^5 = 32$$

a, c 를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

따라서 구하는 집합의 개수는

$$32 + 32 - 16 = 48$$

0481 $B = \{1, 3, 9\}$

집합 A 의 부분집합 중에서 집합 B 의 원소를 적어도 하나 포함하는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 1, 3, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^5 - 2^{5-3} = 32 - 4 = 28$$

답 4

0482 $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

집합 A 의 진부분집합 중에서 홀수를 1개 이상 원소로 갖는 집합의 개수는 집합 A 의 진부분집합의 개수에서 홀수 3, 9, 15를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$(2^5 - 1) - 2^{5-3} = 32 - 1 - 4 = 27$$

답 27

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 073~075쪽

0483 ㄴ, ㄷ. ‘예쁜’, ‘가까운’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

이상에서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0484 $A = \{1, 2\}, B = \{0, 1, 2, 4\}$ 에 대하여 $x \in A, y \in B$ 일 때, $x+y$ 의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$x \backslash y$	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6

$$\therefore C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

따라서 집합 C 의 모든 원소의 합은

$$1+2+3+4+5+6=21$$

답 21

0485 ①, ② 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.

③ $\{3\}$ 이므로 공집합이 아니다.

⑤ $\{6, 12, 18, \dots\}$ 이므로 공집합이 아니다.

따라서 공집합인 것은 ④이다.

답 ④

0486 ① $n(\{\neg, \perp, \sqcup\}) - n(\{\cap, \sqcap\}) = 3 - 2 = 1$

② $n(\{1\}) + n(\{3\}) = 1 + 1 = 2$

③ $n(\{x, y\}) = n(\{8, 9\}) = 2$

④ $A=B$ 이면 $A \subset B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.

⑤ $n(\emptyset) + n(\{2\}) + n(\{0, \emptyset\}) = 0 + 1 + 2 = 3$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0487 이차방정식 $x^2 - 4x + 6 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (-2)^2 - 1 \times 6 = -2 < 0$$

이므로 이차방정식 $x^2 - 4x + 6 = 0$ 은 실근을 갖지 않는다.

$$\therefore n(A) = 0$$

따라서 $n(B) = n(A) = 0$ 이어야 하므로 이차방정식

$x^2 + ax + 2a = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = a^2 - 4 \times 1 \times 2a < 0$$

$$a(a-8) < 0 \quad \therefore 0 < a < 8$$

즉 정수 a 는 1, 2, 3, ..., 7의 7개이다.

답 7

0488 ① $\emptyset$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A$

② $1 \in A$ 이므로 $\{1\} \subset A$

③ $\emptyset \in A, \{\emptyset\} \in A$ 이므로 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset A$

④ $\{1\} \notin A$ 이므로 $\{\emptyset, \{1\}\} \not\subset A$

⑤ $\{\emptyset\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{\emptyset\} \in A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0489 $X = \{2, 3, 5, 7\}, Y = \{2, 5\}, Z = \{2, 3, 5\}$

이므로 세 집합 X, Y, Z 사이의 포함 관계는

$$Y \subset Z \subset X$$

답 ④

0490 (i) $a=5$ 일 때

$$(x-5)(x-a)=0 \text{에서} \quad (x-5)^2=0$$

$$\therefore x=5$$

따라서 $A = \{5\}$ 이므로 $A \subset B$

(ii) $a \neq 5$ 일 때

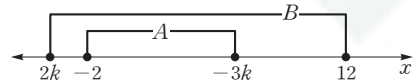
$$(x-5)(x-a)=0 \text{에서} \quad x=5 \text{ 또는 } x=a$$

따라서 $A = \{5, a\}$ 이므로 $A \subset B$ 를 만족시키는 양수 a 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=5$

답 5

0491 $A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $2k \leq -2, -3k \leq 12$ 이어야 하므로

$$-4 \leq k \leq -1$$

따라서 $M = -1, m = -4$ 이므로 $Mm = 4$

답 4

0492 조건 (가)에서 $1 \notin X, 3 \notin X$ 이고 조건 (나)에서 $S(X)$ 의 값이 홀수이므로 집합 X 는 집합 A 의 홀수인 원소 5, 7 중에서 하나만을 원소로 가져야 한다.

따라서 $S(X)$ 의 값이 최대가 되려면 집합 X 는 집합 A 의 원소 중 짝수인 2, 4, 6을 모두 원소로 갖고, 홀수인 7도 원소로 가져야 하므로 $X = \{2, 4, 6, 7\}$

즉 $S(X)$ 의 최댓값은

$$2+4+6+7=19$$

답 ④

0493 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.

따라서 $1 \in B$ 이어야 하므로 $a^2 - 3 = 1, a^2 = 4$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -2$ 일 때

$$A = \{1, 3, 4\}, B = \{1, 3, 4\} \text{이므로} \quad A = B$$

(ii) $a = 2$ 일 때

$$A = \{1, 4, 7\}, B = \{1, 3, 4\} \text{이므로} \quad A \neq B$$

(i), (ii)에서 $a = -2$

답 -2

0494 집합 A 의 진부분집합 중에서 a_1, a_2 를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수가 63이므로

$$2^{n-2} - 1 = 63, \quad 2^{n-2} = 64 = 2^6$$

$$n-2=6 \quad \therefore n=8$$

답 8

0495 집합 A 의 부분집합 중 조건 (가), (나)를 만족시키는 집합 X 의 개수는 다음과 같다.

(i) $8 \in X$ 인 경우

집합 X 의 모든 원소의 곱은 8의 배수이다.

집합 A 의 부분집합 중 8을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{6-1} = 2^5 = 32$$

이때 $n(X) \geq 2$ 이므로 $n(X) = 1$, 즉 $X = \{8\}$ 인 경우를 제외하면 집합 X 의 개수는

$$32 - 1 = 31$$

(ii) $8 \notin X$ 인 경우

집합 X 의 모든 원소의 곱이 8의 배수이려면 4, 6을 반드시 원소로 가져야 한다.

집합 A 의 부분집합 중 8은 원소로 갖지 않고, 4, 6은 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{6-1-2} = 2^3 = 8$$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$31+8=39$$

답 39

0496 $x^2-7x+12=0$ 에서 $(x-3)(x-4)=0$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=4$$

$$\therefore A=\{3, 4\}$$

또 $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이고, $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-2}=2^4=16$$

답 16

0497 집합 A 의 부분집합 중에서 적어도 하나의 2의 배수를 원소로 갖고, 3의 배수는 원소로 갖지 않는 집합은 3, 6, 9를 원소로 갖지 않고 2, 4, 8 중 적어도 하나를 원소로 갖는다.

따라서 구하는 집합의 개수는 집합 $\{2, 4, 5, 7, 8\}$ 의 모든 부분집합의 개수에서 2, 4, 8을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$$2^5-2^{5-3}=32-4=28$$

답 2

0498 집합 A 의 원소는 자연수이고, $x \in A$ 이면 $\frac{64}{x} \in A$ 이므로 x 가 될 수 있는 수는 64의 양의 약수인 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이다.

... 1단계

이때 1과 64, 2와 32, 4와 16은 둘 중 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A 의 원소이어야 한다.

따라서 집합 A 의 원소의 개수는 $A=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 일 때 최대이고, $A=\{8\}$ 일 때 최소이다.

... 2단계

즉 $M=7, m=1$ 이므로

$$M-m=6$$

... 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 x 가 될 수 있는 수 구하기	30 %
2단계 원소의 개수가 최대일 때와 최소일 때의 집합 A 구하기	50 %
3단계 $M-m$ 의 값 구하기	20 %

0499 $x^2-6x+8 \leq 0$ 에서 $(x-2)(x-4) \leq 0$

$$\therefore 2 \leq x \leq 4$$

$$\therefore A=\{x | 2 \leq x \leq 4\}$$

... 1단계

이때 $A \subset B$ 이라면

$$k > 4$$

... 2단계

따라서 정수 k 의 최솟값은 5이다.

... 3단계

답 5

채점 요소	비율
1단계 집합 A 구하기	40 %
2단계 k 의 값의 범위 구하기	50 %
3단계 정수 k 의 최솟값 구하기	10 %

0500 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 $a \in A, b \in A$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$a \backslash b$	-1	0	1	2
-1	2	1	2	5
0	1	0	1	4
1	2	1	2	5
2	5	4	5	8

$$\therefore B=\{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$$

... 1단계

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는

$$2^6=64$$

... 2단계

답 64

채점 요소	비율
1단계 집합 B 를 원소나열법으로 나타내기	60 %
2단계 집합 B 의 부분집합의 개수 구하기	40 %

0501 $\{a, b, c\} \subset X, \{a, b, c, g\} \not\subset X$ 에서 집합 X 는 a, b, c 는 반드시 원소로 갖고, g 는 원소로 갖지 않아야 한다. ... 1단계

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{7-3-1}=2^3=8$$

... 2단계

답 8

채점 요소	비율
1단계 집합 X 가 a, b, c 는 원소로 갖고, g 는 원소로 갖지 않음을 알기	50 %
2단계 집합 X 의 개수 구하기	50 %

0502 전략 n 대신에 주어진 숫자를 대입하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $4^1=4, 4^2=16, 4^3=64, \dots$

따라서 4^k 의 일의 자리의 수는 4, 6이 반복되므로

$$A(4)=\{4, 6\}$$

$$\therefore n(A(4))=2 \text{ (참)}$$

ㄴ. $8^1=8, 8^2=64, 8^3=512, 8^4=4096, 8^5=32768, \dots$

따라서 8^k 의 일의 자리의 수는 8, 4, 2, 6이 반복되므로

$$A(8)=\{2, 4, 6, 8\}$$

$$\therefore A(4) \subset A(8) \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $3^1=3, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81, 3^5=243, \dots$

따라서 3^k 의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1이 반복되므로

$$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$$

이때 $m=5$ 이면 3^5 , 즉 243의 일의 자리의 수가 3이므로

$$A(3^5)=\{1, 3, 7, 9\}$$

$$\therefore A(3^5)=A(3)$$

따라서 $A(3^m)=A(3)$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 m 이 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

참고! $A(3^3)=A(27)=\{1, 3, 7, 9\}$ 이므로 $A(3^m)=A(3)$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 m 의 최솟값은 3이다.

0503 **전략** a_n 의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

a_n 의 값에 따라 집합 A_n 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $a_n=1$ 인 경우

$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$ 의 5개

(ii) $a_n=2$ 인 경우

원소의 최솟값과 최댓값이 각각

1, 3 또는 2, 4 또는 3, 5 또는 4, 6

이어야 한다.

이때 집합 A_n 의 원소의 최솟값과 최댓값이 각각 1, 3이라면 1, 3은 반드시 원소로 갖고, 4, 5, 6은 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는

$$2^{6-2-3}=2^1=2$$

마찬가지로 최솟값과 최댓값이 각각 2, 4 또는 3, 5 또는 4, 6인 집합 A_n 의 개수도 각각 2이므로 $a_n=2$ 인 집합 A_n 의 개수는

$$2 \times 4 = 8$$

momo2000@hanmail.net

(iii) $a_n=3$ 인 경우

원소의 최솟값과 최댓값이 각각

1, 4 또는 2, 5 또는 3, 6

이어야 한다.

이때 집합 A_n 의 원소의 최솟값과 최댓값이 각각 1, 4이라면 1, 4는 반드시 원소로 갖고, 5, 6은 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는

$$2^{6-2-2}=2^2=4$$

마찬가지로 최솟값과 최댓값이 각각 2, 5 또는 3, 6인 집합 A_n 의 개수도 각각 4이므로 $a_n=3$ 인 집합 A_n 의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

(iv) $a_n=4$ 인 경우

원소의 최솟값과 최댓값이 각각

1, 5 또는 2, 6

이어야 한다.

이때 집합 A_n 의 원소의 최솟값과 최댓값이 각각 1, 5이라면 1, 5는 반드시 원소로 갖고, 6은 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는

$$2^{6-2-1}=2^3=8$$

마찬가지로 최솟값과 최댓값이 각각 2, 6인 집합 A_n 의 개수도 8이므로 $a_n=4$ 인 집합 A_n 의 개수는

$$8 \times 2 = 16$$

(v) $a_n=5$ 인 경우

집합 A 의 부분집합 중 1, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-2}=2^4=16$$

이상에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{57}$$

$$= 1 \times 5 + 2 \times 8 + 3 \times 12 + 4 \times 16 + 5 \times 16$$

$$= 201$$

답 201

참고 집합 A 의 부분집합 중 원소가 두 개 이상인 집합의 개수는 집합 A 의 모든 부분집합의 개수에서 원소가 하나도 없거나 원소가 한 개인 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$$2^6 - 1 - 6 = 57$$

0504 **전략** 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용한다.

집합 A 의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{4-1}=2^3=8$$

이므로 집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{15}$ 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 8개이다.

마찬가지로 2, 4, 8을 원소로 갖는 집합도 각각 8개씩이므로

$$f(A_1) \times f(A_2) \times f(A_3) \times \cdots \times f(A_{15})$$

$$= 1^8 \times 2^8 \times 4^8 \times 8^8$$

$$= 2^8 \times 2^{16} \times 2^{24} = 2^{48}$$

$$\therefore m = 48$$

집합 B 의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{5-1}=2^4=16$$

이므로 집합 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{31}$ 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 16개이다.

마찬가지로 3, 9, 27, 81을 원소로 갖는 집합도 각각 16개씩이므로

$$f(B_1) \times f(B_2) \times f(B_3) \times \cdots \times f(B_{31})$$

$$= 1^{16} \times 3^{16} \times 9^{16} \times 27^{16} \times 81^{16}$$

$$= 3^{16} \times 3^{32} \times 3^{48} \times 3^{64} = 3^{160}$$

$$\therefore n = 160$$

$$\therefore \frac{n}{m} = \frac{160}{48} = \frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

06 집합의 연산

교과서 문제 정복하기

본책 077쪽, 079쪽

0505 답 {1, 3, 5, 9, 13} 0506 답 {a, b, c, d}

0507 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
 $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 답 {1, 2, 4, 6, 8, 10}

0508 답 {2, 7} 0509 답 $\emptyset$

0510 $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, $B = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$
 이므로 $A \cap B = \{6, 12, 18\}$ 답 {6, 12, 18}

0511 답 (1) {1, 2, 5, 7, 9, 10} (2) {1, 2}

0512 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.
 답 서로소이다.

0513 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 $A \cap B = \{6\}$
 따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다. 답 서로소가 아니다.

0514 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.
 답 서로소이다.

0515 답 {2, 3, 5, 6, 7, 9, 10}

0516 $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\} = U$ 이므로
 $B^c = \emptyset$ 답 $\emptyset$

0517 답 {a, b, d}

0518 $A = \{1, 3, 5, 15\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로
 $A - B = \{1, 3, 5, 15\}$ 답 {1, 3, 5, 15}

0519 답 (1) {1, 7, 8, 9} (2) {1, 2, 6, 8}
 (3) {2, 6} (4) {7, 9}

0520 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
 $= \{2, 4\} \cap \{1, 2, 3, 5\}$
 $= \{2\}$ 답 {2}

0521 $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
 $= \{1, 2, 3\} \cup \{3, 5\}$
 $= \{1, 2, 3, 5\}$
 답 {1, 2, 3, 5}

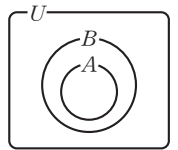
0522 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $= \{0, 1\} \cup \{1, 3, 5\}$
 $= \{0, 1, 3, 5\}$ 답 {0, 1, 3, 5}

0523 답 $\emptyset$ 0524 답 A

0525 답 $\emptyset$ 0526 답 U

0527 답 A 0528 답 U

0529 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A \cap B = A$ (참)
 ㄴ. $A \cup B = B$ (거짓)
 ㄷ. $A - B = \emptyset$ (참)
 ㄹ. $A \neq B$ 이므로 $B - A \neq \emptyset$ (거짓)
 ㅁ. $B^c \subset A^c$ (참)
 ㅂ. $A \cap B^c = A - B = \emptyset$ 이므로 $(A \cap B^c) \subset B$ (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

momo2000@hanmail.net 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

0530 답 (가) 드모르간의 법칙 (나) 결합법칙

0531 답 (가) 드모르간의 법칙 (나) 분배법칙

0532 (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ 이므로
 $(A \cup B)^c = \{4\}$
 (2) $A^c = \{3, 4, 5\}$, $B^c = \{1, 4, 7\}$ 이므로
 $A^c \cap B^c = \{4\}$
 (3) $A \cap B = \{2, 6\}$ 이므로
 $(A \cap B)^c = \{1, 3, 4, 5, 7\}$
 (4) $A^c = \{3, 4, 5\}$, $B^c = \{1, 4, 7\}$ 이므로
 $A^c \cup B^c = \{1, 3, 4, 5, 7\}$
 답 (1) {4} (2) {4}
 (3) {1, 3, 4, 5, 7} (4) {1, 3, 4, 5, 7}

0533 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 7 + 5 - 10 = 2$ 답 2

0534 (1) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 60 - 37 = 23$
 (2) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 22 = 18$
 (3) $n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
 $= 37 - 22 = 15$
 (4) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 37 + 40 - 22 = 55$
 답 (1) 23 (2) 18 (3) 15 (4) 55

0535 (1) $n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cap B)$
 $= 50 - 16 = 34$

(2) $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cup B)$
 $= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$
 $= 50 - (32 + 28 - 16) = 6$

답 (1) 34 (2) 6

0536 $n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C)$
 $- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 50 + 35 + 26 - 9 - 7 - 8 + 4$
 $= 91$

답 91

momo2000@hanmail.net

유형 익히기

• 본책 080~089쪽

0537 $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $C = \{3, 6, 9\}$ 이므로
 $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, \dots, 8\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$
 $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$

답 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

0538 $C = \{1, 2, 4, 8\}$
 ③ $(A \cap B) \cap C = \{4\} \cap \{1, 2, 4, 8\} = \{4\}$
 ④ $(A \cup B) \cap C = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\} \cap \{1, 2, 4, 8\} = \{4, 8\}$
 ⑤ $A \cup (B \cap C) = \{3, 4, 6, 8\} \cup \{4\} = \{3, 4, 6, 8\}$
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0539 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\} = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 양의 약수}\}$
 $\therefore p = 6$

답 6

참고 $A \cap B$ 는 24와 30의 양의 공약수의 집합이므로 24와 30의 최대공약수인 6의 양의 약수의 집합이다.

0540 ① $A \cap B = \{8\}$
 ② $A \cap B = \emptyset$
 ③ $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ 이므로
 $A \cap B = \{3, 9, 15, 21, \dots\}$
 ④ $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$ 이므로
 $A \cap B = \{2\}$
 ⑤ $|x| > 1$ 에서 $x < -1$ 또는 $x > 1$ 이므로
 $B = \{\dots, -3, -2, 2, 3, \dots\}$
 $\therefore A \cap B = \emptyset$

따라서 두 집합 A, B 가 서로소인 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

0541 $\neg. \{2, 4, 6, \dots\}$
 $\neg. \{1, 3, 5, \dots\}$
 $\neg. x^2 - 6x + 8 = 0$ 에서 $(x-2)(x-4) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
 따라서 주어진 집합은 $\{2, 4\}$ 이다.

$\neg. \{1, 3, 9\}$
 $\neg. x^2 < 0$ 을 만족시키는 자연수 x 는 없으므로 주어진 집합은 $\emptyset$ 이다.

이상에서 집합 $\{1, 3, 5, 7\}$ 과 서로소인 집합은 $\neg.$, $\neg.$, $\neg.$ 이다.

답 $\neg.$, $\neg.$, $\neg.$

0542 $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $B = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$
 이므로 $A \cap B = \{1, 4, 7, 10\}$... 1단계
 즉 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 4, 7, 10을 원소로 갖지 않는 집합이다. ... 2단계
 따라서 집합 X 의 개수는
 $2^{10-4} = 2^6 = 64$... 3단계

답 64

	채점 요소	비율
1단계	집합 $A \cap B$ 구하기	30 %
2단계	집합 X 의 조건 구하기	40 %
3단계	집합 X 의 개수 구하기	30 %

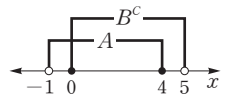
0543 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A = \{1, 2, 4, 8\}$,
 $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로
 $A^c = \{3, 5, 6, 7, 9\}$
 $\therefore A^c - B = \{3, 5, 6, 7, 9\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{3, 5, 7, 9\}$
 따라서 집합 $A^c - B$ 의 모든 원소의 합은
 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

답 24

0544 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{3, 5, 7, 9\}$,
 $B = \{2, 5, 8\}$ 이므로
 $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{5\}$
 $\therefore (A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\} - \{5\}$
 $= \{2, 3, 7, 8, 9\}$

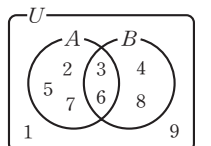
답 $\{2, 3, 7, 8, 9\}$

0545 $B^c = \{x | 0 \leq x < 5\}$ 이므로
 오른쪽 그림에서
 $A \cup B^c = \{x | -1 < x < 5\}$



답 ①

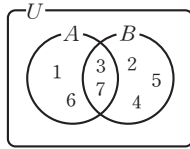
0546 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
 $\therefore B = \{3, 4, 6, 8\}$



답 $\{3, 4, 6, 8\}$

0547 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로
주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면
오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B=\{2, 3, 4, 5, 7\}$$



답 ⑤

0548 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

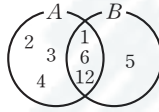
$$A-B=\{2, 3, 4\}, B-A=\{5\}$$

따라서 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타
내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$B=\{1, 5, 6, 12\}$$

즉 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1+5+6+12=24$$



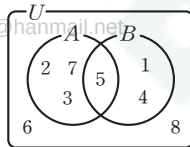
답 24

0549 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므
로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타
내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B=\{1, 4, 5\}$$

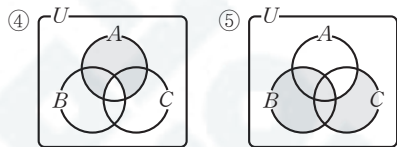
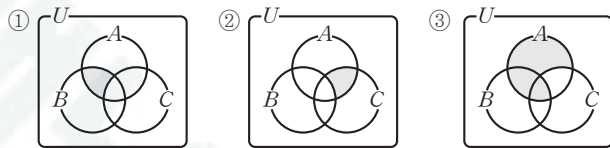
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는

$$2^3=8$$



답 8

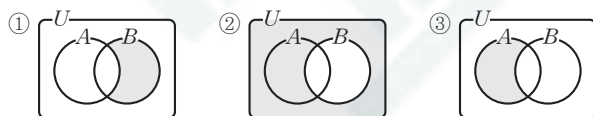
0550 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ③이다.

답 ③

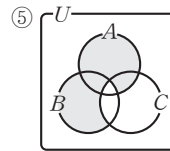
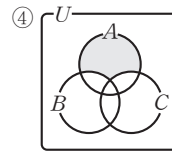
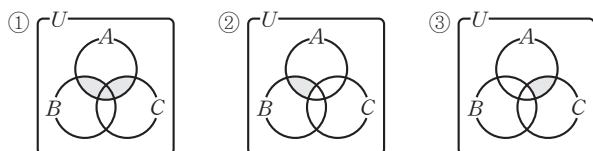
0551 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0552 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ④이다.

답 ④

0553 $A \cap B = \{1, 5\}$ 이므로 $5 \in A$

$$\text{즉 } a^2+1=5 \text{이므로 } a^2=4$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-2$ 일 때, $A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{-7, -4, 5\}$ 이므로

$$A \cap B = \{5\}$$

(ii) $a=2$ 일 때, $A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{0, 1, 5\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1, 5\}$$

(i), (ii)에서 $a=2$

답 2

0554 $A-B=\{3\}$ 이므로 $2a-b, 1, 5$ 는 $A \cap B$ 의 원소이다.

$$\text{즉 } 2a-b \in B, 1 \in B \text{이므로 } a+3b=1, 2a-b=9$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=-1$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

0555 $B-A=\{5, 7\}$ 이므로 5, 7은 집합 B 의 원소이다.

(i) $a+2=5$, 즉 $a=3$ 일 때

$$A=\{1, 4, 6, 9\}, B=\{4, 5, 7\} \text{이므로}$$

$$B-A=\{5, 7\}$$

(ii) $4a-5=5$, 즉 $a=\frac{5}{2}$ 일 때

$$A=\left\{1, 4, 5, \frac{25}{4}\right\}, B=\left\{4, \frac{9}{2}, 5\right\} \text{이므로}$$

$$B-A=\left\{\frac{9}{2}\right\}$$

(i), (ii)에서 $a=3$

따라서 $A=\{1, 4, 6, 9\}$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 곱은

$$1 \times 4 \times 6 \times 9 = 216$$

답 216

다른 풀이 $5 \in B, 7 \in B$ 이므로

$$(a+2)+(4a-5)=5+7$$

$$5a=15 \quad \therefore a=3$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 곱은

$$1 \times 4 \times 2a \times a^2 = 8a^3 = 8 \times 3^3 = 216$$

0556 $A \cup B = \{1, 2, 5, 6\}$ 이므로 $6 \in A$ 또는 $6 \in B$

즉 $a+2=6$ 또는 $2a=6$ 또는 $-a+4=6$ 이므로

$$a=4 \text{ 또는 } a=3 \text{ 또는 } a=-2$$

(i) $a=4$ 일 때, $A=\{1, 6, 8\}$, $B=\{0, 2, 5\}$ 이므로

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$$

(ii) $a=3$ 일 때, $A=\{1, 5, 6\}$, $B=\{1, 2, 5\}$ 이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6\}$$

(iii) $a=-2$ 일 때, $A=\{-4, 0, 1\}$, $B=\{2, 5, 6\}$ 이므로

$$A \cup B = \{-4, 0, 1, 2, 5, 6\}$$

이상에서 $a=3$

따라서 $A \cap B = \{1, 5\}$ 이므로 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은
 $1+5=6$

답 6

0557 ① $U^c = \emptyset$ 이므로 $U^c \subset A$
 ③ $A \cup (A \cap A^c) = A \cup \emptyset = A$
 ⑤ $A \cup A^c = U$ 이므로 $B \subset (A \cup A^c)$
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

momo2000@hanmail.net

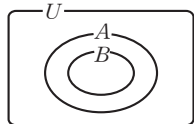
0558 ① $A \cup \emptyset = A$
 ② $A^c \cap A = \emptyset$
 ③ $U - A = A^c$, $(A^c)^c = A$ 이므로 $U - A \neq (A^c)^c$
 ④ $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$
 ⑤ $A \cap (B \cup U) = A \cap U = A$
 따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

0559 ② $A \cap B^c = A - B$
 ③ $B - A^c = B \cap (A^c)^c = A \cap B$
 ④ $A - (A \cap B) = A - B$
 ⑤ $A \cap (U - B) = A \cap B^c = A - B$
 따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

답 ③

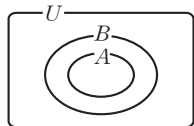
0560 $A \cup B = A$ 이므로 $B \subset A$
 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽
 그림과 같다.



③ $B \subset A$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이므로
 $A^c \cup B^c = B^c$
 ④ $A - B \neq \emptyset$
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0561 $\neg$. $B^c \subset A^c$ 이므로
 $A \subset B$ (참)
 $\cup$. $A \cup B = B$ (거짓)
 $\cap$. $A^c \cap B = B - A \neq \emptyset$ (거짓)
 $\cap$. $B^c - A^c = B^c \cap (A^c)^c = B^c \cap A = A - B = \emptyset$ (참)
 이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\cap$ 이다.



답 $\neg$, $\cap$

0562 $A \cap B^c = \emptyset$ 이면 $A \subset B$
 이때 $A \subset B$ 가 성립하려면 k 는 12의 양의 약수이어야 한다.
 따라서 k 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0563 $(A - B) \cup X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $\therefore (A - B) \subset X \subset (A \cup B)$
 즉 $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 집합 X 는
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 중 1, 2, 3을 반드시 원소로
 갖는 집합이다.
 따라서 집합 X 의 개수는 $2^{8-3} = 2^5 = 32$

답 ④

0564 $A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$... 1단계

이때 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 2, 4\}$
 즉 $\{1, 2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 집합 X 는
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 의 부분집합 중 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는
 집합이다. ... 2단계

따라서 집합 X 의 개수는
 $2^{6-3} = 2^3 = 8$... 3단계

답 8

	채점 요소	비율
1단계	세 집합 $A \cap B$, X , A 사이의 포함 관계 구하기	30 %
2단계	집합 X 의 조건 구하기	40 %
3단계	집합 X 의 개수 구하기	30 %

0565 $X - Y = X$ 이므로 $X \cap Y = \emptyset$
 즉 집합 Y 는 전체집합 U 의 부분집합 중 3, 4, 5, 6을 원소로 갖
 지 않는 집합이다.
 따라서 집합 Y 의 개수는 $2^{6-4} = 2^2 = 4$

답 4

0566 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 전체집합 U 의 부분집합 C 가 $A \cup C = B \cup C$ 를 만족시키려면 집
 합 C 는 두 집합 A , B 의 공통인 원소 6, 9를 제외한 나머지 원소
 2, 3, 4를 반드시 원소로 가져야 한다.
 따라서 집합 C 의 개수는
 $2^{10-3} = 2^7 = 128$

답 128

0567 조건 (가)에서 집합 X 는 전체집합 U 의 부분집합 중 2, 6
 을 반드시 원소로 갖고, 4, 7, 8은 원소로 갖지 않는 집합이다.
 따라서 집합 X 의 개수는
 $2^{8-2-3} = 2^3 = 8 \quad \therefore a = 8$
 조건 (나)에서 집합 Y 는 전체집합 U 의 부분집합 중 2, 4, 6, 7은
 반드시 원소로 갖고, 3, 5는 원소로 갖지 않는 집합이다.
 따라서 집합 Y 의 개수는
 $2^{8-4-2} = 2^2 = 4 \quad \therefore b = 4$
 $\therefore a + b = 12$

답 12

0568 $(A - B) - C = (A \cap B^c) \cap C^c$
 $= A \cap (B^c \cap C^c) \leftarrow \text{결합법칙}$
 $= A \cap (B \cup C)^c \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$
 $= A - (B \cup C)$

답 ②

0569 $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$
 $= A^c \cap (B^c \cup B)$
 $= A^c \cap U$
 $= A^c$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0570 \quad (A-B) \cup (A-C) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\
 &= A \cap (B^c \cup C^c) \\
 &= A \cap (B \cap C)^c \\
 &= A - (B \cap C)
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0571 \quad A \cap B^c &= \emptyset, \text{ 즉 } A-B = \emptyset \text{ 이므로 } A \subset B \\
 \therefore A \cap \{(A \cap B) \cup (B-A)\} \\
 &= A \cap \{(B \cap A) \cup (B \cap A^c)\} \\
 &= A \cap \{B \cap (A \cup A^c)\} \\
 &= A \cap (B \cap U) \\
 &= A \cap B = A
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 0572 \quad \neg. A \cap (A \cup B)^c &= A \cap (A^c \cap B^c) \\
 &= (A \cap A^c) \cap B^c \\
 &= \emptyset \cap B^c = \emptyset \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \neg. A - (A-B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\
 &= A \cap (A^c \cup B) \\
 &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\
 &= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B \text{ (거짓)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \neg. (A \cap B) - (A \cap C) \\
 &= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c \\
 &= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) \\
 &= \{(A \cap B) \cap A^c\} \cup \{(A \cap B) \cap C^c\} \\
 &= \emptyset \cup \{(A \cap B) \cap C^c\} \\
 &= (A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) - C \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \neg. A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c \\
 &= A \cap (B^c \cap C^c) \\
 &= A \cap B^c \cap C^c \\
 (A-B) \cap (A-C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\
 &= A \cap B^c \cap A \cap C^c \\
 &= A \cap B^c \cap C^c \\
 \therefore A - (B \cup C) &= (A-B) \cap (A-C) \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\subset$, $\supset$ 이다.

답 ④

$$\begin{aligned}
 0573 \quad \{(A \cap B) \cup (B \cup A^c)^c\} \cap B \\
 &= \{(A \cap B) \cup (B^c \cap A)\} \cap B \\
 &= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B \\
 &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B \\
 &= (A \cap U) \cap B \\
 &= A \cap B
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } A \cap B = A \text{ 이므로 } A \subset B$$

$$\neg. A \cup B = B \text{ (거짓)}$$

$$\neg. A - B = \emptyset \text{ (참)}$$

$$\neg. A^c \cup B = U \text{ (참)}$$

$$\neg. A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = B^c \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\supset$ 이다.

답 $\neg$, $\supset$

$$\begin{aligned}
 0574 \quad \{(A^c \cap B^c) \cup (B-A)\} \cup B^c \\
 &= \{(A^c \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\} \cup B^c \\
 &= \{(A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\} \cup B^c \\
 &= \{A^c \cap (B^c \cup B)\} \cup B^c \\
 &= (A^c \cap U) \cup B^c = A^c \cup B^c
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } A^c \cup B^c = B^c \text{ 이므로 } A^c \subset B^c \therefore B \subset A$$

따라서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ①이다.

답 ①

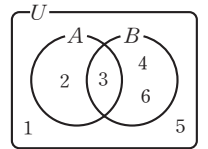
$$\begin{aligned}
 0575 \quad (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
 &= (A \cup B) - (A \cap B) \\
 &= \{2, 4, 6\}
 \end{aligned}$$

이때 $A = \{2, 3\}$ 이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{1, 5\}$ 이므로 집합 $A^c \cap B^c$ 의 모든 원소의 합은

$$1 + 5 = 6$$

답 6



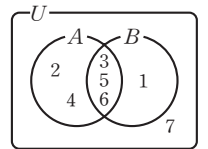
$$\begin{aligned}
 0576 \quad (B-A) \cup B^c &= (B \cap A^c) \cup B^c \\
 &= (B \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c) \\
 &= U \cap (A^c \cup B^c) \\
 &= A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \\
 &= \{1, 2, 4, 7\}
 \end{aligned}$$

이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B = \{1, 3, 5, 6\}$$

따라서 집합 B 의 원소의 개수는 4이다.

답 4



$$\begin{aligned}
 0577 \quad (A \cup B) \cap B &= B, (A \cap B) \cup A = A \text{ 이므로} \\
 \{(A \cup B) \cap B\} \cap \{(A \cap B) \cup A\}^c &= B \cap A^c = B - A \\
 \text{즉 } B - A &= \{3, 4, 5, 6\} \text{ 이므로 } 3, 4, 5, 6 \text{ 은 집합 } A \cap B \cap C \text{ 의} \\
 &\text{원소가 될 수 없다.}
 \end{aligned}$$

한편 $1 \notin C$ 에서 1도 집합 $A \cap B \cap C$ 의 원소가 될 수 없다. 따라서 집합 $A \cap B \cap C$ 의 원소가 될 수 있는 것은 2이다.

답 ①

$$\begin{aligned}
 0578 \quad A_{20} \cup (A_2 \cap A_5) &= A_{20} \cup A_{10} = A_{10} \\
 &= \{10, 20, 30, \dots, 100\}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 10이다.

답 10

$$\begin{aligned}
 \text{다른 풀이 } A_{20} \cup (A_2 \cap A_5) &= (A_{20} \cup A_2) \cap (A_{20} \cup A_5) \\
 &= A_2 \cap A_5 = A_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0579 \quad (A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{36} \cup A_{24}) \\
 &= (A_{36} \cup A_{18}) \cap (A_{36} \cup A_{24}) \\
 &= A_{36} \cup (A_{18} \cap A_{24}) \\
 &= A_{36} \cup A_{72} = A_{36}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0580 \quad A_{12} \cap A_{18} \cap A_{30} &= (A_{12} \cap A_{18}) \cap A_{30} \\ &= A_6 \cap A_{30} = A_6 \\ &= \{1, 2, 3, 6\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A_{12} \cap A_{18} \cap A_{30}$ 의 모든 원소의 합은
 $1+2+3+6=12$

답 12

$$\begin{aligned} 0581 \quad \neg. A_8 \cap A_{20} &= A_{40} \text{이므로} \quad (A_8 \cap A_{20}) \subset A_4 \text{ (참)} \\ \neg. (A_3 \cap A_4) \cup A_6 &= A_{12} \cup A_6 = A_6 \text{ (거짓)} \\ \neg. (A_5 \cup A_3) \cap (A_9 \cup A_3) &= (A_5 \cap A_9) \cup A_3 \\ &= A_{45} \cup A_3 = A_3 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 $\neg$, $\neg$

$$\begin{aligned} 0582 \quad x^2 - 4x + 3 \leq 0 \text{에서} \quad (x-1)(x-3) \leq 0 \\ \therefore 1 \leq x \leq 3 \quad \therefore A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\} \end{aligned}$$

이때 $A \cap B = \emptyset$,

$$A \cup B = \{x \mid 1 \leq x < 5\} \text{이므로}$$

오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid 3 < x < 5\} \\ &= \{x \mid (x-3)(x-5) < 0\} \\ &= \{x \mid x^2 - 8x + 15 < 0\} \end{aligned}$$

따라서 $a = -8, b = 15$ 이므로 $a+b=7$

답 7

RPM 비법 노트

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$)의 서로 다른 두 실근이 α, β ($\alpha < \beta$)이다.

$$\Rightarrow \{x \mid ax^2+bx+c=0\} = \{\alpha, \beta\}$$

$$\{x \mid ax^2+bx+c < 0\} = \{x \mid \alpha < x < \beta\}$$

$$\{x \mid ax^2+bx+c > 0\} = \{x \mid x < \alpha \text{ 또는 } x > \beta\}$$

$$\begin{aligned} 0583 \quad x^2 - x - 6 = 0 \text{에서} \\ (x+2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3 \\ \therefore A = \{-2, 3\} \end{aligned}$$

... 1단계

이때 $A-B = \{3\}$ 이므로 $-2 \in B$ 이다.

즉 방정식 $x^2 - ax - 10 = 0$ 의 한 근이 -2 이므로

$$4 + 2a - 10 = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$$

$$\therefore B = \{-2, 5\}$$

... 2단계

$$\therefore A \cup B = \{-2, 3, 5\}$$

... 3단계

답 $\{-2, 3, 5\}$

	채점 요소	비율
1단계	집합 A 구하기	30 %
2단계	집합 B 구하기	50 %
3단계	집합 $A \cup B$ 구하기	20 %

$$\begin{aligned} 0584 \quad |x-1| < a \text{에서} \\ -a < x-1 < a \quad \therefore -a+1 < x < a+1 \\ \therefore A = \{x \mid -a+1 < x < a+1\} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x - 15 < 0 \text{에서}$$

$$(x+3)(x-5) < 0 \quad \therefore -3 < x < 5$$

$$\therefore B = \{x \mid -3 < x < 5\}$$

이때 $A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$ 이어야

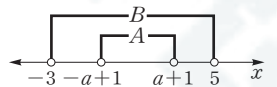
하므로 오른쪽 그림에서

$$-a+1 \geq -3, a+1 \leq 5$$

$$\therefore 0 < a \leq 4 \quad (\because a > 0)$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 4



$$0585 \quad x^2 - 4x + 4 \geq 0 \text{에서} \quad (x-2)^2 \geq 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$A = \{x \mid x \text{는 실수}\}$$

$$x^2 - 3x > 0 \text{에서}$$

$$x(x-3) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 3$$

$$\therefore B = \{x \mid x < 0 \text{ 또는 } x > 3\}$$

이때 $B \cup C = A$,

$$B \cap C = \{x \mid -1 \leq x < 0\} \text{이므로}$$

오른쪽 그림에서

$$C = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$$

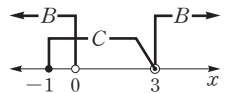
$$= \{x \mid (x+1)(x-3) \leq 0\}$$

$$= \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$$

따라서 $a = -2, b = -3$ 이므로

$$ab = 6$$

답 ①



$$\begin{aligned} 0586 \quad n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 20 - n(A \cup B) = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore n(A \cup B) = 12$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$12 = n(A) + n(B) - 4$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 16$$

답 16

$$0587 \quad A \subset B^c \text{이므로} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$\therefore n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$10 = 6 + n(B) - 0$$

$$\therefore n(B) = 4$$

답 4

$$0588 \quad n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$5 = 18 - n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 13$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 18 + 20 - 13 = 25$$

이때 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^c$ 이므로

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 30 - 25 = 5$$

답 5

$$\text{다른 풀이} \quad n(A \cup B) = n(A-B) + n(B)$$

$$= 5 + 20 = 25$$

0589 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$$= 11 + 10 - 16 = 5$$

$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$

$$= 10 + 7 - 12 = 5$$

$A \cap C = \emptyset$ 에서 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이므로

$$n(A \cap C) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$$

$$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 11 + 10 + 7 - 5 - 5 - 0 + 0 = 18$$

답 ②

0590 닭을 키우는 가구의 집합을 A, 토끼를 키우는 가구의 집합을 B라 하면

$$n(A) = 150, n(B) = 113, n(A \cup B) = 220$$

따라서 닭과 토끼를 모두 키우는 가구 수는

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 150 + 113 - 220 = 43$$

답 43

0591 한라산을 등반해 본 회원의 집합을 A, 설악산을 등반해 본 회원의 집합을 B라 하면

$$n(A) = 23, n(A \cap B) = 15, n(A \cup B) = 33$$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$33 = 23 + n(B) - 15 \quad \therefore n(B) = 25$$

따라서 설악산을 등반해 본 회원 수는 25이다.

답 ④

0592 학생 전체의 집합을 U, 농구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 27, n(B) = 34, n(A \cap B) = 19$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 27 + 34 - 19 = 42$$

따라서 농구와 축구 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생 수는

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 50 - 42 = 8$$

답 8

0593 A 문제를 맞힌 학생의 집합을 A, B 문제를 맞힌 학생의 집합을 B라 하면

$$n(A) = 23, n(B) = 18, n(A \cup B) = 30$$

... 1단계

따라서 두 문제를 모두 맞힌 학생 수는

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 23 + 18 - 30 = 11$$

... 2단계

이때 A 문제만 맞힌 학생의 집합은 $A - B$, B 문제만 맞힌 학생의 집합은 $B - A$ 이므로 두 문제 중 한 문제만 맞힌 학생 수는

$$n(A - B) + n(B - A)$$

$$= \{n(A) - n(A \cap B)\} + \{n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= (23 - 11) + (18 - 11) = 19$$

... 3단계

답 19

	채점 요소	비율
1단계	주어진 조건을 집합으로 나타내기	30 %
2단계	두 문제를 모두 맞힌 학생 수 구하기	30 %
3단계	두 문제 중 한 문제만 맞힌 학생 수 구하기	40 %

다른 풀이 두 문제 중 한 문제만 맞힌 학생 수는

$$n(A - B) + n(B - A)$$

$$= \{n(A \cup B) - n(B)\} + \{n(A \cup B) - n(A)\}$$

$$= (30 - 18) + (30 - 23) = 19$$

0594 학생 전체의 집합을 U, A 사이트를 선호하는 학생의 집합을 A, B 사이트를 선호하는 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 35, n(B) = 25, n(A^c \cap B^c) = 2$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A^c \cap B^c)$$

$$= 40 - 2 = 38$$

따라서 A 사이트만 선호하는 학생 수는

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B)$$

$$= 38 - 25 = 13$$

답 ②

0595 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$n(A \cup B \cup C) = 50,$$

$$n(A) = 27, n(B) = 21, n(C) = 30, n(A \cap B \cap C) = 6$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

에서

$$50 = 27 + 21 + 30 - n(A \cap B) - n(B \cap C)$$

$$- n(C \cap A) + 6$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 34$$

따라서 세 권의 책 중 한 권만 읽은 학생 수는

$$n(A \cup B \cup C) - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\}$$

$$- 2 \times n(A \cap B \cap C)$$

$$= 50 - (34 - 2 \times 6) = 28$$

답 28

0596 ① $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$= (B \cup A) - (B \cap A) = B \triangle A$$

② $A \triangle \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A - \emptyset = A$

③ $A \triangle A^c = (A \cup A^c) - (A \cap A^c) = U - \emptyset = U$

④ $A \triangle U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^c$

⑤ $A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0597 $X \diamond Y = (X \cup Y) \cap Y^c = (X \cap Y^c) \cup (Y \cap Y^c)$

$$= (X \cap Y^c) \cup \emptyset = X \cap Y^c$$

$$= X - Y$$

... 1단계

즉 $A \diamond B = A - B = \{5, 7, 9\}$ 이므로

$$(A \diamond B) \diamond C = (A - B) - C$$

$$= \{5, 7, 9\} - \{4, 5, 6\} = \{7, 9\}$$

... 2단계

따라서 $(A \diamond B) \diamond C$ 의 모든 원소의 합은

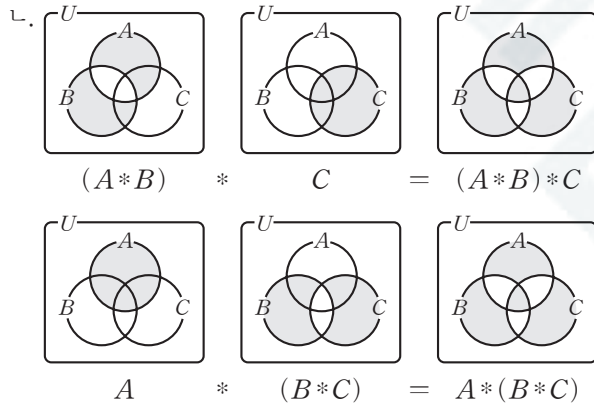
$$7 + 9 = 16$$

... 3단계

답 16

	채점 요소	비율
1단계	$X \diamond Y$ 를 간단히 하기	40 %
2단계	$(A \diamond B) \diamond C$ 구하기	40 %
3단계	$(A \diamond B) \diamond C$ 의 모든 원소의 합 구하기	20 %

0598 $\neg, A * B = (A - B) \cup (B - A)$
 $= (B - A) \cup (A - B)$
 $= B * A$ (참)



$\therefore (A * B) * C = A * (B * C)$ (참)

$\neg, A^c * B^c = (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c)$
 $= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$
 $= (B - A) \cup (A - B)$
 $= (A - B) \cup (B - A)$
 $= A * B$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ③

0599 학생 전체의 집합을 U , A 에 가입한 학생의 집합을 A , B 에 가입한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 30, n(A) = 20, n(B) = 14$$

(i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우

$n(A \cup B)$ 가 최소일 때, 즉 $B \subset A$ 일 때이므로

$$n(A \cap B) = n(B) = 14$$

(ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우

$n(A \cup B)$ 가 최대일 때, 즉 $A \cup B = U$ 일 때이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$30 = 20 + 14 - n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 4$$

(i), (ii)에서 $M = 14, m = 4$ 이므로

$$M - m = 10$$

답 10

0600 (i) $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우

$n(A \cap B)$ 가 최소일 때, 즉 $n(A \cap B) = 13$ 일 때이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 35 + 28 - 13$$

$$= 50$$

... 1단계

(ii) $n(A \cup B)$ 가 최소인 경우

$n(A \cap B)$ 가 최대일 때, 즉 $B \subset A$ 일 때이므로

$$n(A \cup B) = n(A) = 35$$

... 2단계

(i), (ii)에서 $n(A \cup B)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$50 + 35 = 85$$

... 3단계

답 85

	채점 요소	비율
1단계	$n(A \cup B)$ 의 최댓값 구하기	40 %
2단계	$n(A \cup B)$ 의 최솟값 구하기	40 %
3단계	$n(A \cup B)$ 의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	20 %

0601 학생 전체의 집합을 U , S 회사 제품을 사용하는 학생의 집합을 A , L 회사 제품을 사용하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 24, n(B) = 14$$

이때 S 회사 제품과 L 회사 제품을 모두 사용하지 않는 학생의 집합은 $A^c \cap B^c$ 이므로

$$\begin{aligned}
 n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \\
 &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\
 &= 40 - \{24 + 14 - n(A \cap B)\} \\
 &= 2 + n(A \cap B)
 \end{aligned}$$

(i) $n(A^c \cap B^c)$ 가 최대인 경우

$n(A \cap B)$ 가 최대일 때, 즉 $B \subset A$ 일 때이므로

$$n(A^c \cap B^c) = 2 + n(A \cap B) = 2 + n(B)$$

$$= 2 + 14 = 16$$

(ii) $n(A^c \cap B^c)$ 가 최소인 경우

$n(A \cap B)$ 가 최소일 때, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 일 때이므로

$$n(A^c \cap B^c) = 2 + n(A \cap B)$$

$$= 2 + 0 = 2$$

(i), (ii)에서 S 회사 제품과 L 회사 제품을 모두 사용하지 않는 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합은

$$16 + 2 = 18$$

답 18

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 090~093쪽

0602 $A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{1, 5, 9, 13, 17\},$

$C = \{4, 6, 8, 9\}$ 이므로

$$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\therefore (A \cup C) \cap B$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 5, 9, 13, 17\}$$

$$= \{5, 9\}$$

따라서 집합 $(A \cup C) \cap B$ 의 모든 원소의 합은

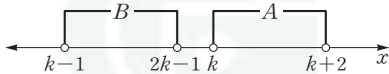
$$5 + 9 = 14$$

답 14

0603 두 집합 A, B 가 서로소이면

$$A \cap B = \emptyset$$

이때 $k-1 < k$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$ 이 되도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $2k-1 \leq k$ 이어야 하므로

$$0 < k \leq 1 (\because k > 0)$$

따라서 양수 k 의 최댓값은 1이다.

답 1

0604 주어진 벤다이어그램에서

$$(A \cup B)^c = \{e\}$$

또 $B = \{b, c, d\}, A^c = \{c, d, e\}$ 이므로

$$B - A^c = \{b, c, d\} - \{c, d, e\} = \{b\}$$

$$\therefore (A \cup B)^c \cup (B - A^c) = \{b, e\}$$

답 {b, e}

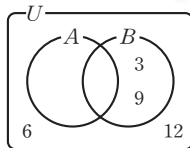
0605 $A \cup B$ 의 원소 중 3과 9는 A^c 의 원소이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B - A = \{3, 9\}$$

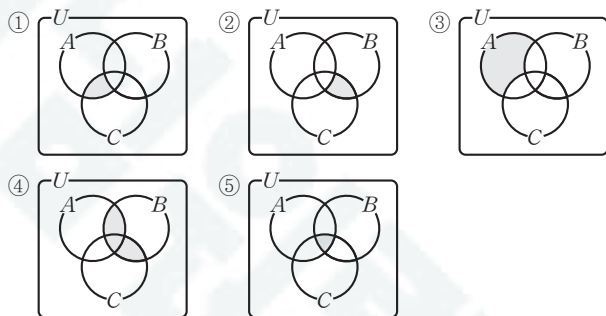
따라서 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합은

$$3 + 9 = 12$$

답 12



0606 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ②이다.

답 ②

0607 $A \cup B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 $10 \in B$

(i) $a=10$ 일 때

$$B = \{10, 12\} \text{이므로 } A \cup B = \{6, 8, 10, 12\}$$

(ii) $a+2=10$, 즉 $a=8$ 일 때

$$B = \{8, 10\} \text{이므로 } A \cup B = \{6, 8, 10\}$$

(i), (ii)에서 $a=8$

답 8

0608 $B \cap A^c = \{2\}$, 즉 $B - A = \{2\}$ 이므로 $2 \in B$

(i) $x=2$ 일 때

$$A = \{1, 3, 4\}, B = \{1, 2, 4\} \text{이므로}$$

$$B - A = \{2\}$$

(ii) $x+2=2$, 즉 $x=0$ 일 때

$$A = \{-1, 0, 3\}, B = \{0, 1, 2\} \text{이므로}$$

$$B - A = \{1, 2\}$$

(i), (ii)에서 $x=2$

따라서 $A = \{1, 3, 4\}$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 4 = 8$$

답 8

0609 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 $A \cap B = \{1, 3\}$ 을 만족시키려면 집합 B 는 1, 3은 반드시 원소로 갖고, 2, 4, 6, 12는 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 a 의 값은 1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수이면서 짝수가 아닌 수이다.

즉 a 의 값이 될 수 있는 것은 3, 9, 15이므로

$$M = 15, m = 3$$

$$\therefore M + m = 18$$

답 18

0610 두 집합 A, B 가 서로소이므로 $A \cap B = \emptyset$

$$\neg, (A \cap B)^c = \emptyset^c = U \text{ (참)}$$

$$\neg, A - (A \cap B) = A - \emptyset = A \text{ (참)}$$

$$\neg, A \cap B^c = A - B = A \text{ (거짓)}$$

$$\neg, A^c \subset B^c \text{이라면 } B \subset A \text{이어야 한다.}$$

$$\text{그런데 } A \cap B = \emptyset \text{이므로 } B \not\subset A \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

0611 $A = \{1, 3, 9\}, B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이므로

$$A \subset B$$

$$\textcircled{2} B \cap A^c = B - A = \{2, 6, 18\} \text{이므로 } B \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\textcircled{3} A \cup B = B \text{이므로 } (A \cup B) \subset B$$

$$\textcircled{5} A - B = \emptyset$$

따라서 옳지 않은 것은 $\textcircled{2}, \textcircled{5}$ 이다.

답 $\textcircled{2}, \textcircled{5}$

0612 $X \cup A = X - B$ 에서

$$(X - B) \subset X \text{이므로 } (X \cup A) \subset X$$

$$\text{이때 } X \subset (X \cup A) \text{이므로 } X \cup A = X$$

$$\therefore A \subset X$$

$$\text{또 } X \subset (X \cup A) \text{이므로 } X \subset (X - B)$$

$$\text{이때 } (X - B) \subset X \text{이므로 } X - B = X$$

$$\therefore X \cap B = \emptyset, \text{ 즉 } X \subset B^c$$

$$\therefore A \subset X \subset B^c$$

이때 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 이므로

$$B^c = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$$

즉 $\{2, 7\} \subset X \subset \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ 이므로 집합 X 는

$\{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ 의 부분집합 중 2, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

답 16

다른 풀이 $A \subset X$, $X \cap B = \emptyset$ 이므로 집합 X 는 $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 의 부분집합 중 2, 7은 반드시 원소로 갖고, 1, 5, 8은 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^{9-2-3} = 2^4 = 16$

0613 ① $(A - B^c)^c \cap A = (A \cap B)^c \cap A$
 $= (A^c \cup B^c) \cap A$
 $= (A^c \cap A) \cup (B^c \cap A)$
 $= \emptyset \cup (B^c \cap A)$
 $= B^c \cap A = A - B$

② $(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$
 $= A \cap (B^c \cup B)$
 $= A \cap U = A$

③ $(A \cup B) \cap (A - B)^c = (A \cup B) \cap (A \cap B^c)^c$
 $= (A \cup B) \cap (A^c \cup B)$
 $= (A \cap A^c) \cup B$
 $= \emptyset \cup B = B$

④ $(A - B^c) - C = (A \cap B) \cap C^c$
 $= A \cap (B \cap C^c)$
 $= A \cap (B - C)$

⑤ $A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c$
 $= A \cap (B^c \cup C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
 $= (A - B) \cup (A \cap C)$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0614 $\{B \cap (B^c - A)^c\} \cup \{B \cap (B^c \cup A)\}$
 $= \{B \cap (B^c \cap A^c)^c\} \cup \{B \cap (B^c \cup A)\}$
 $= \{B \cap (B \cup A)\} \cup \{B \cap (B^c \cup A)\}$
 $= B \cap \{(B \cup A) \cup (B^c \cup A)\}$
 $= B \cap \{(B \cup B^c) \cup A\}$
 $= B \cap (U \cup A)$
 $= B \cap U = B$

즉 $B = A \cup B$ 이므로 $A \subset B$

① $A \cap B = A$

③ $B - A \neq \emptyset$

④ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = A^c$

⑤ $A^c \cap B = B - A \neq \emptyset$ 이므로 $A \cup B^c \neq U$

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

0615 $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
 이므로

$$(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B$$

$$= \{8, 12, 16\}$$

따라서 집합 $(A^c \cup B)^c$ 의 모든 원소의 합은

$$8 + 12 + 16 = 36$$

답 36

0616 $A - B^c = A \cap B = \{1, 6, 7\}$
 $(A \cap B^c) \cup (A^c - B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$
 $= (A \cup A^c) \cap B^c$
 $= U \cap B^c = B^c$
 $= \{2, 3, 8, 9\}$

이때 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이므로

$$B = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$$

$$\therefore B - A = B - (A \cap B) = \{4, 5, 10\}$$

따라서 집합 $B - A$ 의 원소의 개수는 3이다.

답 3

0617 $A_m \subset (A_4 \cap A_6)$ 에서 $A_4 \cap A_6 = A_{12}$ 이므로
 $A_m \subset A_{12}$

즉 m 은 12의 배수이므로 m 의 최솟값은 12이다.

$$(A_{12} \cup A_{18}) \subset A_n \text{에서 } A_{12} \subset A_n, A_{18} \subset A_n$$

즉 n 은 12와 18의 공약수이므로 n 의 최댓값은 12와 18의 최대 공약수인 6이다.

따라서 m 의 최솟값과 n 의 최댓값의 곱은

$$12 \times 6 = 72$$

답 72

0618 $x^2 - 20x + 36 > 0$ 에서

$$(x - 2)(x - 18) > 0 \quad \therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 18$$

$$\therefore A = \{x \mid x < 2 \text{ 또는 } x > 18\}$$

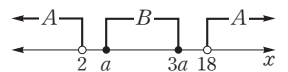
$$(x - a)(x - 3a) \leq 0 \text{에서 } a < 3a \text{이므로}$$

$$a \leq x \leq 3a$$

$$\therefore B = \{x \mid a \leq x \leq 3a\}$$

이때 $A \cap B = \emptyset$ 이어야 하므로

왼쪽 그림에서



$$a \geq 2, 3a \leq 18$$

$$\therefore 2 \leq a \leq 6$$

따라서 자연수 a 는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

답 5

0619 $A = \{2, 4, 6, \dots, 30\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ 이므로
 $A \cap B = \{2, 4, 8, 16\}$

따라서 $n(A) = 15$, $n(A \cap B) = 4$ 이므로

$$n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$= 15 - 4 = 11$$

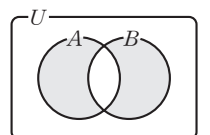
답 11

0620 $n(A^c \cap B) = n(B - A) = 13$ 이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$$

$$= 15 + 13 = 28$$

이때 집합 $(A - B) \cup (B - A)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$n(A \cap B)$$

$$= n(A \cup B) - n((A - B) \cup (B - A))$$

$$= 28 - 20 = 8$$

답 ④

다른 풀이 $n(A^c \cap B) = n(B - A) = 13$ 이므로
 $n(A - B) = n((A - B) \cup (B - A)) - n(B - A)$
 $= 20 - 13 = 7$
 $\therefore n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 15 - 7 = 8$

0621 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ 에서
 $14 = 16 - n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 2$
 $\therefore n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 17 - 2 = 15$
 즉 $(B - A) \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 는 집합 B 의 부분
 집합 중 집합 $B - A$ 의 원소 15개를 반드시 원소로 갖는 집합이
 다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{17-15} = 2^2 = 4 \quad \text{답 4}$$

0622 은행 A를 이용하는 고객의 집합을 A, 은행 B를 이용하
 는 고객의 집합을 B라 하면

$$n(A \cup B) = 35 + 30 = 65$$

조건 (가)에서 $n(A) + n(B) = 82$ 이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 82 - 65 = 17$$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

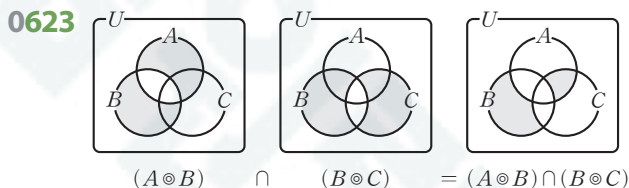
$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 65 - 17 = 48$$

이때 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고
 객의 수는

$$\frac{1}{2} \times 48 = 24$$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$$30 - 24 = 6 \quad \text{답 ②}$$



따라서 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합이

$(A \otimes B) \cap (B \otimes C)$ 인 것은 ①이다. 답 ①

0624 학생 전체의 집합을 U, A 서비스를 구독하는 학생의 집
 합을 A, B 서비스를 구독하는 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 27, n(B) = 32, n(A \cap B) \geq 15$$

(i) $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우

$n(A \cap B)$ 가 최소일 때, 즉 $n(A \cap B) = 15$ 일 때이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 27 + 32 - 15 = 44$$

(ii) $n(A \cup B)$ 가 최소인 경우

$n(A \cap B)$ 가 최대일 때, 즉 $A \subset B$ 일 때이므로

$$n(A \cup B) = n(B) = 32$$

(i), (ii)에서 A 또는 B 서비스를 구독하는 학생 수의 최댓값과 최
 소값의 합은

$$44 + 32 = 76 \quad \text{답 76}$$

0625 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A - B = \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로
 $4 \in (A \cap B)$, $6 \in (A \cap B)$... ①단계

이때 조건 (가)에서 집합 B의 원소의 개수가 3이므로

$B = \{a, 4, 6\}$ 이라 하면 조건 (나)에서 집합 B의 모든 원소의 합
 이 17이므로

$$a + 4 + 6 = 17 \quad \therefore a = 7$$

$$\therefore B = \{4, 6, 7\} \quad \text{... ②단계}$$

$$\therefore B - A = \{7\} \quad \text{... ③단계}$$

답 {7}

	채점 요소	비율
①단계	집합 $A \cap B$ 에 속하는 원소 구하기	40 %
②단계	집합 B 구하기	40 %
③단계	집합 $B - A$ 구하기	20 %

0626 $A \cap B = \{0, 3\}$ 이므로 $0 \in A$

즉 $a^2 + 2a = 0$ 이므로 $a(a + 2) = 0$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 0 \quad \text{... ①단계}$$

(i) $a = -2$ 일 때, $A = \{0, 1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 3\}$ 이므로

$$A \cap B = \{0, 3\}$$

(ii) $a = 0$ 일 때, $A = \{0, 1, 3\}$, $B = \{-4, 1, 3\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

(i), (ii)에서 $a = -2$... ②단계

답 -2

	채점 요소	비율
①단계	$0 \in A$ 임을 이용하여 a의 값 구하기	40 %
②단계	조건을 만족시키는 a의 값 구하기	60 %

0627 조건 (가)에서 $A \cap X = A$ 이므로

$$A \subset X$$

$A^c \cap B = B - A = \{6, 7, 8\}$ 이므로 조건 (나)에서

$$X \cap \{6, 7, 8\} = \{6, 7\}$$

따라서 집합 X는 집합 A를 포함하면서 6, 7은 반드시 원소로 갖
 고, 8은 원소로 갖지 않아야 한다.

즉 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 3, 4, 5, 6, 7은 반드시
 원소로 갖고, 8은 원소로 갖지 않는 집합이다. ... ①단계

따라서 집합 X의 개수는

$$2^{10-5-1} = 2^4 = 16 \quad \text{... ②단계}$$

답 16

	채점 요소	비율
①단계	집합 X의 조건 구하기	70 %
②단계	집합 X의 개수 구하기	30 %

0628 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 에서

$$(x+1)(x-3) > 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 3$$

$$\therefore A = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 3\}$$

이때 $A \cup B = \{x | x \text{는 실수}\}$,

$A \cap B = \{x | 3 < x \leq 4\}$ 이므로 오른쪽

그림에서

$$B = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$$

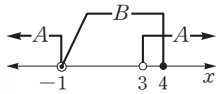
$$= \{x | (x+1)(x-4) \leq 0\}$$

$$= \{x | x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$$

따라서 $a = -3$, $b = -4$ 이므로

$$a + b = -7$$

... 1단계



... 2단계

... 3단계

답 -7

	채점 요소	비율
1단계	집합 A의 부등식의 해 구하기	30 %
2단계	집합 B의 부등식 구하기	50 %
3단계	$a + b$ 의 값 구하기	20 %

0629 **전략** 서로소인 두 자연수는 1 이외의 공약수를 갖지 않음을 이용하여 집합 X의 원소가 되기 위한 조건을 찾는다.

조건 (나)에서 $X \cap B = \emptyset$ 이므로 집합 X의 모든 원소는 20과 서로소가 아니다.

이때 $20 = 2^2 \times 5$ 이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

또 조건 (다)에서 $14 = 2 \times 7$ 이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아니다.

따라서 조건 (가)에서 집합 X의 모든 원소는 120 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 자연수이므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

$$5, 15, 25, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 115$$

이때 $X \neq \emptyset$ 이므로 구하는 집합 X의 개수는

$$2^{10} - 1 = 1023$$

답 1023

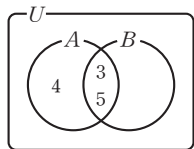
0630 **전략** 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타낸다.

조건 (가)에서

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 2, 4\}$$

따라서 $3 \in (A \cap B)$, $4 \notin (A \cap B)$,

$5 \in (A \cap B)$ 이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때

$$\begin{aligned} (A \cup X) - B &= (A \cup X) \cap B^c \\ &= (A \cap B^c) \cup (X \cap B^c) \\ &= (A - B) \cup (X - B) \\ &= \{4\} \cup (X - B) \end{aligned}$$

이고 조건 (나)에서 $n(X) = 1$ 인 모든 집합 X에 대하여 집합 $(A \cup X) - B$ 의 원소의 개수가 1이므로

$$X - B = \{4\} \text{ 또는 } X - B = \emptyset$$

이어야 한다.

즉 $X = \{1\}$ 또는 $X = \{2\}$ 일 때 $X - B = \emptyset$ 이어야 하므로

$$1 \in B, 2 \in B \quad \therefore B = \{1, 2, 3, 5\}$$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$$1 + 2 + 3 + 5 = 11$$

답 11

참고 $X = \{3\}$ 또는 $X = \{5\}$ 이면 $X - B = \emptyset$ 이고, $X = \{4\}$ 이면 $X - B = \{4\}$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

0631 **전략** 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

국어 과목을 수강하는 학생의 집합을 A, 수학 과목을 수강하는 학생의 집합을 B, 영어 과목을 수강하는 학생의 집합을 C라 하면

$$n(A \cup B \cup C) = 34, n(A) = 18, n(B) = 20, n(C) = 23$$

또 두 과목만 수강하는 학생이 9명이므로

$$\begin{aligned} n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C) \\ = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\ = 3 \times n(A \cap B \cap C) + 9 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - \{3 \times n(A \cap B \cap C) + 9\} + n(A \cap B \cap C) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - 2 \times n(A \cap B \cap C) - 9 \end{aligned}$$

이므로 $34 = 18 + 20 + 23 - 2 \times n(A \cap B \cap C) - 9$

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 9$$

따라서 세 과목을 모두 수강하는 학생 수는 9이다.

답 9

07 명제

교과서 문제 정복하기

본책 095쪽, 097쪽

0632 ㄱ. 참인 명제이다.

ㄴ. $x^2=1$ 은 x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄷ. 2는 소수이지만 짝수이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. 거짓인 명제이다.

ㅁ. ‘좋다.’의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0633 10 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 p 의 진리집합은 $\{2, 3, 5, 7\}$

답 $\{2, 3, 5, 7\}$

0634 $x^2-2x-8 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-4) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 4$

따라서 조건 q 의 진리집합은 $\{1, 2, 3, 4\}$

답 $\{1, 2, 3, 4\}$

0635 답 자연수는 정수가 아니다. (거짓)

0636 답 4는 6의 약수이거나 2의 배수이다. (참)

0637 $\sim p$: x 는 9의 약수가 아니다.

이때 9의 약수는 1, 3, 9이므로 조건 $\sim p$ 의 진리집합은

$\{5, 7\}$

답 풀이 참조

0638 $\sim q$: $x^2-6x+5 \neq 0$

$x^2-6x+5=0$ 에서 $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 조건 $\sim q$ 의 진리집합은

$\{3, 7, 9\}$

답 풀이 참조

0639 답 가정: 8의 배수이다., 결론: 2의 배수이다.

0640 답 가정: x 는 홀수이다., 결론: x^2 은 홀수이다.

0641 [반례] $x=1, y=2$ 이면 $xy=2$ 이므로 xy 는 짝수이지만 x 는 홀수이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

0642 $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0, y \neq 0$ 이므로 $x^2+y^2 \neq 0$ 이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 참

0643 [반례] $x=-\frac{3}{2}$ 이면 $-2 < x < 1$ 이지만 $x < -1$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

0644 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

답 참

0645 $x^2 < 0$ 을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

0646 답 어떤 실수 x 에 대하여 $2x+3 \leq 5$ 이다. (참)

0647 답 모든 실수 x 에 대하여 $|x| \geq 0$ 이다. (참)

0648 역: $ab=0$ 이면 $a=0, b=0$ 이다. (거짓)

[반례] $a=1, b=0$ 이면 $ab=0$ 이지만 $a \neq 0$ 이다.

대우: $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. (참)

답 풀이 참조

0649 역: $a+b>0$ 이면 $a>0$ 또는 $b>0$ 이다. (참)

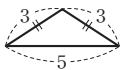
대우: $a+b \leq 0$ 이면 $a \leq 0$ 이고 $b \leq 0$ 이다. (거짓)

[반례] $a=1, b=-2$ 이면 $a+b=-1 < 0$ 이지만 $a > 0$ 이다.

답 풀이 참조

0650 역: 이등변삼각형이면 정삼각형이다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림의 삼각형은 이등변삼각형이지만 정삼각형이 아니다.



대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. (참)

답 풀이 참조

0651 $p: |x| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$

따라서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

0652 $x^2-3x+2=0$ 에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

0653 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P=\{1, 2, 4\}, Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\therefore P \subset Q, Q \not\subset P$

따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0654 주어진 명제의 대우는 ‘두 자연수 a, b 에 대하여 a, b 가 모두 $\boxed{\text{㉞}} \text{ 짝수}$ 이면 $a+b$ 는 $\boxed{\text{㉞}} \text{ 짝수}$ 이다.’이다.

$a=2k, b=2l$ (k, l 은 자연수)이라 하면

$a+b=2k+2l=2(\boxed{\text{㉞}} k+l)$ 이므로 $a+b$ 는 $\boxed{\text{㉞}} \text{ 짝수}$ 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 ㉞ 짝수 ㉞ 짝수 ㉞ $k+l$

0655 $a \neq 0$ 또는 $\boxed{\text{㉞}} b \neq 0$ 이라 가정하면 $|a| \neq 0$ 또는

$|b| \neq 0$ 이므로 $|a|+|b| \boxed{\text{㉞}} \neq 0$

그런데 이것은 $\boxed{\text{㉞}} |a|+|b|=0$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 두 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| = 0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다. 답 (가) $b \neq 0$ (나) $\neq$ (다) $|a| + |b| = 0$

0656 $a^2 + 5b^2 - 4ab = (a^2 - 4ab + 4b^2) + b^2$
 $= (a-2b)^2 + (\text{가}) b^2 \geq 0$
 $\therefore a^2 + 5b^2 \geq 4ab$
 (단, 등호는 $a-2b=0, b=0$, 즉 $a=b=(\text{나}) 0$ 일 때 성립)
답 (가) b^2 (나) 0

0657 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - (\text{가}) 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2}$
 $= \frac{((\text{나}) \sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$
 $\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
 (단, 등호는 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 즉 $(\text{다}) a=b$ 일 때 성립)
답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (다) $a=b$

0658 $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$ (단, 등호는 $x=1$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최솟값은 2이다. 답 2

참고! 등호는 $x = \frac{1}{x}$ 에서 $x^2=1$, 즉 $x=1$ ($\because x > 0$)일 때 성립한다.

0659 $2x > 0, \frac{18}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $2x + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{2x \times \frac{18}{x}} = 2 \times 6 = 12$
 (단, 등호는 $x=3$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최솟값은 12이다. 답 12

0660 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$
 $= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - ((\text{가}) a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$
 $= b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2$
 $= ((\text{나}) bx - ay)^2 \geq 0$
 $\therefore (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 (단, 등호는 $bx - ay = 0$, 즉 $(\text{다}) ay = bx$ 일 때 성립)
답 (가) $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$ (나) $bx - ay$ (다) $ay = bx$

유형 익히기

• 본책 098~109쪽

- 0661** ① $6+3=9 > 8$ 이므로 거짓인 명제이다.
 ② $\sqrt{4}=2$ 는 유리수이므로 거짓인 명제이다.
 ③ $x > 4$ 이면 $x+1 > 5$ 이므로 참인 명제이다.
 ④ x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 ⑤ 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16의 5개이므로 참인 명제이다.
답 ④

- 0662** ① 참인 명제이다.
 ②, ③ ‘가까운’, ‘아름답다.’의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 ④ 거짓인 명제이다.
 ⑤ x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 따라서 명제인 것은 ①, ④이다. 답 ①, ④

- 0663** ㄴ. 두 직선이 평행할 때에만 엇각의 크기가 서로 같으므로 거짓인 명제이다.
 ㄷ. 두 함수의 합은 짝수이므로 거짓인 명제이다.
 이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

- 0664** ‘ $\sim p$ 또는 q ’의 부정은 ‘ p 그리고 $\sim q$ ’
 $p: -1 < x \leq 5, \sim q: x \geq 2$ 이므로 ‘ p 그리고 $\sim q$ ’는
 $2 \leq x \leq 5$ 답 $2 \leq x \leq 5$

- 0665** ㄱ. 15의 양의 약수는 1, 3, 5, 15이므로 그 합은
 $1+3+5+15=24$
 즉 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
 ㄴ. 8은 합성수이므로 주어진 명제는 거짓이고, 그 부정은 참이다. momo2000@hanmail.net
 ㄷ. 직사각형은 평행사변형이므로 주어진 명제는 참이고, 그 부정은 거짓이다.
 ㄹ. $\sqrt{9}+2=5$ 는 유리수이므로 주어진 명제는 거짓이고, 그 부정은 참이다.
 이상에서 그 부정이 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

- 0666** $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ 의 부정은
 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0$
 $\therefore a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a$
 즉 a, b, c 중에 서로 다른 것이 적어도 하나 있다. 답 ⑤

- 0667** 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $x^2 - x - 6 = 0$ 에서 $(x+2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 3 \quad \therefore P = \{-2, 3\}$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 에서 $(x+2)(x-4) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 4 \quad \therefore Q = \{-2, 4\}$
 따라서 조건 ‘ p 또는 q ’의 진리집합은
 $P \cup Q = \{-2, 3, 4\}$ 답 $\{-2, 3, 4\}$

- 0668** $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ 에서 $(x-2)(x-5) \leq 0$
 $\therefore 2 \leq x \leq 5$
 따라서 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{2, 3, 4, 5\}$
 이므로 조건 $\sim p$ 의 진리집합은
 $P^c = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 따라서 구하는 원소의 합은
 $1+6+7+8+9+10=41$ 답 ⑤

0669 $-4 \leq x < 2$ 에서 $x \geq -4$ 그리고 $x < 2$

$p: x < -4$ 에서 $\sim p: x \geq -4$

$q: x \geq 2$ 에서 $\sim q: x < 2$

따라서 조건 ' $-4 \leq x < 2$ '는 ' $\sim p$ 그리고 $\sim q$ '이므로 구하는 진리 집합은 $P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c$ **답 ④**

0670 ① [반례] $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.

② [반례] $x = 3, y = -1$ 이면 $x + y = 2 > 0$ 이지만 $xy = -3 < 0$ 이다.

③ $|x| > 1$ 이면 $x < -1$ 또는 $x > 1$ 이므로 $x^2 > 1$ 이다.

④ [반례] $x = 0$ 이면 $-1 < x < 1$ 이지만 $x^2 = 0$ 이다.

⑤ [반례] 이웃하는 두 변의 길이가 서로 다른 직사각형은 네 각이 모두 직각인 사각형이지만 정사각형은 아니다.

따라서 참인 명제는 ③이다. **답 ③**

0671 ② [반례] $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ 이면 a, b 는 무리수이지만 $a + b = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0, ab = \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ 는 모두 유리수이다.

⑤ [반례] $\angle A = \angle C = 70^\circ$ 인 삼각형 ABC는 이등변삼각형이지만 $\angle B = 40^\circ$ 이므로 $\angle A \neq \angle B$ 이다. **답 ②, ⑤**

0672 $\neg. |a| + |b| = 0$ 이면 $a = 0, b = 0$ 이므로 $ab = 0$ 이다.
 $\neg$. [반례] $a = -2, b = -1, c = 0$ 이면 $a < b < c$ 이지만 $ab > bc$ 이다.

$\neg$. [반례] $a = 1, b = 1, c = 2$ 이면 $(a - b)(b - c) = 0$ 이지만 $a = b \neq c$ 이다.

이상에서 참인 명제는 $\neg$ 뿐이다. **답 $\neg$**

0673 명제 $q \rightarrow p$ 가 거짓임을 보이려면 집합 Q의 원소 중에서 집합 P의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 원소는 집합 $Q \cap P^c = Q - P$ 의 원소인 d, f, g 이다. **답 ④**

0674 명제 ' $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^c 에는 속하고 집합 Q^c 에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 집합은 $P^c \cap (Q^c)^c = P^c \cap Q$ **답 ④**

0675 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P = \{3, 6, 9\}, Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$... 1단계

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이려면 집합 P^c 의 원소 중에서 집합 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

즉 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c$ 의 원소이다.

이때 $P \cup Q = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ 이므로

$(P \cup Q)^c = \{1, 5, 7\}$... 2단계

따라서 구하는 모든 원소의 합은 $1 + 5 + 7 = 13$... 3단계 **답 13**

	채점 요소	비율
1단계	두 조건 p, q 의 진리집합 구하기	30 %
2단계	명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 원소 구하기	60 %
3단계	2단계에서 구한 모든 원소의 합 구하기	10 %

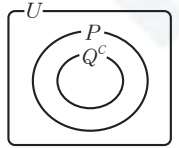
0676 명제 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이므로

$$Q^c \subset P$$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$P \cup Q = U$$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다. **답 ②**



0677 $\neg. R \subset Q$ 이므로 명제 $r \rightarrow q$ 는 거짓이다.

$\neg. (P \cap Q) \subset P$ 이므로 명제 $(p \text{이고 } q) \rightarrow p$ 는 참이다.

$\neg. R \subset (P \cup Q)$ 이므로 명제 $r \rightarrow (p \text{ 또는 } q)$ 는 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 $\neg, \neg$ 이다. **답 ⑤**

0678 $P \cap Q = P$ 에서 $P \subset Q$

$P \cup R = R$ 에서 $P \subset R$

① $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

② $P \subset R$ 이므로 명제 $p \rightarrow r$ 는 참이다.

③ $P \subset Q$ 에서 $Q^c \subset P^c$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

④ $P \subset R$ 에서 $R^c \subset P^c$ 이므로 명제 $\sim r \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

0679 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$$P = \{x \mid -2 \leq x \leq k\},$$

$$Q = \left\{x \mid -\frac{k}{3} \leq x < 10\right\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$

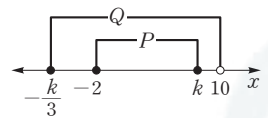
이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$-\frac{k}{3} \leq -2, k < 10$$

$$\therefore 6 \leq k < 10$$

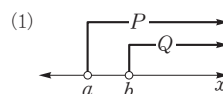
따라서 정수 k 는 6, 7, 8, 9이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$6 + 7 + 8 + 9 = 30$$

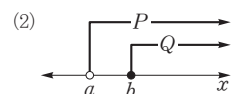


RPM비법노트

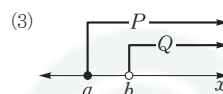
Q ⊂ P가 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기



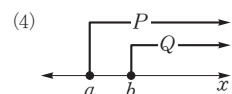
$$\Rightarrow a \leq b$$



$$\Rightarrow a < b$$



$$\Rightarrow a \leq b$$



$$\Rightarrow a \leq b$$

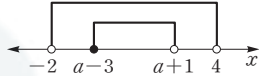
0680 주어진 명제가 참이 되려면

$$\{x|a-3 \leq x < a+1\} \subset \{x|-2 < x < 4\}$$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a-3 > -2, a+1 \leq 4$$

$$\therefore 1 < a \leq 3$$



답 ②

0681 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x|-4 < x < 2\}, Q = \{x|x \leq a+1\},$$

$$R = \{x|x \geq b+1\}$$

두 명제 $p \rightarrow q, p \rightarrow r$ 가 모두 참이 되려면 $P \subset Q, P \subset R$ 이어야 한다.

즉 오른쪽 그림에서

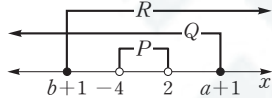
$$a+1 \geq 2, b+1 \leq -4$$

$$\therefore a \geq 1, b \leq -5 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 a 의 최솟값은 1, b 의 최댓값은 -5 이므로

$$m=1, M=-5$$

$$\therefore M+m=-4$$



답 -4

	채점 요소	비율
1단계	세 조건 p, q, r 의 진리집합 사이의 포함 관계 구하기	40 %
2단계	a, b 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	$M+m$ 의 값 구하기	20 %

0682 $p: |x-1| \geq a$ 에서 $\sim p: |x-1| < a$ 이므로

$$-a < x-1 < a \quad \therefore -a+1 < x < a+1$$

$$q: |x+2| < 5 \text{에서} \quad -5 < x+2 < 5$$

$$\therefore -7 < x < 3$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P^c = \{x|-a+1 < x < a+1\},$$

$$Q = \{x|-7 < x < 3\}$$

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면

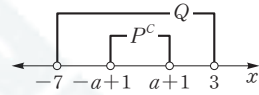
$P^c \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림

에서

$$-a+1 \geq -7, a+1 \leq 3$$

$$\therefore 0 < a \leq 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 2이다.



답 2

0683 $\neg$. [반례] $x=1$ 이면 $x+6=7 > 0$ 이다.

$\neg$. 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2-2x+1=(x-1)^2 \geq 0$$

이다.

$$\therefore x^2=3x \text{에서} \quad x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2=3x$ 이다.

$\neg$. 모든 실수 x 에 대하여 $|x| \geq x$ 이다.

이상에서 참인 명제는 $\neg, \supset$ 이다.

답 $\neg, \supset$

0684 ① $x+2 < 9$ 에서 $x < 7$

즉 $x \in U$ 인 모든 x 에 대하여 $x+2 < 9$ 이므로 참이다.

② $x=3$ 이면 $x^2-1=8 > 7$ 이므로 참이다.

③ [반례] $x=5$ 이면 $x^2+3=28$ 이다.

④ $x=1$ 이면 $x^2-2=-1$ 이므로 참이다.

⑤ $x^2-6x < 0$ 에서

$$x(x-6) < 0 \quad \therefore 0 < x < 6$$

즉 $x \in U$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2-6x < 0$ 이므로 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ③이다.

답 ③

0685 주어진 명제의 부정은

어떤 실수 x 에 대하여 $x^2-4x+a < 0$ 이다.

위의 명제가 참이 되려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \times a > 0$$

$$\therefore a < 4$$

답 $a < 4$

0686 ① 역: $ab=0$ 이면 $a=0$ 이다. (거짓)

[반례] $a=1, b=0$ 이면 $ab=0$ 이지만 $a \neq 0$ 이다.

② 역: $a^2 \geq 1$ 이면 $a \geq 1$ 이다. (거짓)

[반례] $a=-2$ 이면 $a^2=4 > 1$ 이지만 $a < 1$ 이다.

③ 역: $a+b \leq 2$ 이면 $a \leq 1$ 이고 $b \leq 1$ 이다. (거짓)

[반례] $a=-1, b=2$ 이면 $a+b=1 < 2$ 이지만 $b > 1$ 이다.

④ 역: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$ 이다. (참)

⑤ 역: $a+b$ 가 짝수이면 ab 는 홀수이다. (거짓)

[반례] $a=2, b=4$ 이면 $a+b=6$ 은 짝수이지만 $ab=8$ 도 짝수이다.

따라서 그 역이 참인 명제는 ④이다.

답 ④

0687 명제 $\sim q \rightarrow p$ 의 역 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우인

$q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

답 ④

0688 $\neg$. 역: $x=1$ 이면 $x^3=1$ 이다. (참)

$$\text{또 } x^3=1 \text{에서} \quad x^3-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \quad (\because x^2+x+1 > 0)$$

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

$\neg$. 역: $x=y=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

$\supset$. 역: $x < y$ 이면 $|x-y|=y-x$ 이다. (참)

$x < y$ 이면 $x-y < 0$ 이므로

$$|x-y| = -(x-y) = y-x$$

명제: [반례] $x=1, y=1$ 이면 $|x-y|=y-x=0$ 이지만

$x=y$ 이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

이상에서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 $\neg, \supset$ 이다.

답 ③

0689 명제 ‘ $x+y < a$ 이면 $x < 3$ 또는 $y < -1$ 이다.’가 참이 되려면 그 대우 ‘ $x \geq 3$ 이고 $y \geq -1$ 이면 $x+y \geq a$ 이다.’가 참이 되어야 한다.

이때 $x \geq 3, y \geq -1$ 에서 $x+y \geq 2$ 이므로

$$a \leq 2$$

답 $a \leq 2$

0690 명제 ‘ $x^2 - kx + 6 \neq 0$ 이면 $x - 1 \neq 0$ 이다.’가 참이 되려면 그 대우 ‘ $x - 1 = 0$ 이면 $x^2 - kx + 6 = 0$ 이다.’가 참이 되어야 한다.

$x^2 - kx + 6 = 0$ 에 $x - 1 = 0$, 즉 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - k + 6 = 0 \quad \therefore k = 7$$

답 7

0691 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우인 $q \rightarrow p$ 도 참이다.

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | x < a\}, Q = \{x | -3 < x < 2\}$$

이때 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이려면

$Q \subset P$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에

서 $a \geq 2$

따라서 실수 a 의 최솟값은 2이다.

답 2

0692 명제 ‘ $|x - a| \geq 5$ 이면 $|x - 2| > 3$ 이다.’가 참이 되려면 그 대우 ‘ $|x - 2| \leq 3$ 이면 $|x - a| < 5$ 이다.’가 참이 되어야 한다.

... 1단계

이때 두 조건 p, q 를 각각 $p: |x - 2| \leq 3, q: |x - a| < 5$ 라 하자.

$$|x - 2| \leq 3 \text{에서} \quad -3 \leq x - 2 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5$$

$$|x - a| < 5 \text{에서} \quad -5 < x - a < 5$$

$$\therefore a - 5 < x < a + 5$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | -1 \leq x \leq 5\}, Q = \{x | a - 5 < x < a + 5\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a - 5 < -1, a + 5 > 5$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

... 2단계

... 3단계

답 3

채점 요소	비율
1단계 주어진 명제의 대우가 참이 되어야 함을 알기	30 %
2단계 a 의 값의 범위 구하기	60 %
3단계 정수 a 의 개수 구하기	10 %

0693 ① 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 명제

$p \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

② 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

③ 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

⑤ 명제 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

0694 $\neg$. 명제 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$\neg$. 명제 $\sim s \rightarrow r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r \rightarrow s$ 도 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow s$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow s$ 도 참이다.

$\neg$. 두 명제 $q \rightarrow r, r \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg, \neg$

0695 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 그 대우 $p \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

두 명제 $r \rightarrow s, p \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 명제 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 명제 $s \rightarrow p$ 가 참이어야 한다.

또 명제 $s \rightarrow p$ 가 참이므로 그 대우 $\sim p \rightarrow \sim s$ 도 참이다.

따라서 명제 $r \rightarrow \sim q$ 가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는

②이다.

답 ②

0696 ① $x^2 = 4$ 이면 $x = -2$ 또는 $x = 2$

따라서 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

② $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이면 $x + y \geq 2$ 이므로 $p \Rightarrow q$

[$\leftarrow$ 의 반례] $x = 3, y = 0$ 이면 $x + y = 3 > 2$ 이지만 $y < 1$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

③ $x = y$ 이면 $xz = yz$ 이므로 $p \Rightarrow q$

[$\leftarrow$ 의 반례] $x = 1, y = 2, z = 0$ 이면 $xz = yz = 0$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ $x = 2, y = 3$ 이면 $xy = 6$ 이므로 $p \Rightarrow q$

[$\leftarrow$ 의 반례] $x = -2, y = -3$ 이면 $xy = 6$ 이지만 $x \neq 2, y \neq 3$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $x < 1$ 이면 $x \leq 2$ 이므로 $p \Rightarrow q$

[$\leftarrow$ 의 반례] $x = \frac{3}{2}$ 이면 $x \leq 2$ 이지만 $x > 1$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

즉 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ①이다.

답 ①

0697 $\neg$. $a > 1, b > 1$ 이면 $a - 1 > 0, b - 1 > 0$ 이므로

$$ab + 1 - (a + b) = a(b - 1) - (b - 1)$$

$$= (a - 1)(b - 1) > 0$$

$$\text{즉 } ab + 1 > a + b \text{이므로 } p \Rightarrow q$$

[$\leftarrow$ 의 반례] $a = 0, b = 0$ 이면 $ab + 1 > a + b$ 이지만 $a < 1, b < 1$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

$\neg$. $ab = |ab|$ 이면 $ab \geq 0$ 이므로

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ 또는 } a \leq 0, b \leq 0$$

따라서 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $a > b$ 이고 $b > c$ 이면 $a > c$ 이므로 $p \Rightarrow q$

[$\Leftarrow$ 의 반례] $a=1, b=2, c=-1$ 이면 $a > c$ 이지만 $a < b$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

이상에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 $\neg, \supset$

0698 $q: xy=0$ 에서 $x=0$ 또는 $y=0$

$r: |x|+|y|=0$ 에서 $x=0, y=0$

$\neg. p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

(거짓)

$\neg. p \Leftrightarrow r$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄷ. $\sim r: x \neq 0$ 또는 $y \neq 0, \sim q: x \neq 0, y \neq 0$

따라서 $\sim r \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $\sim r$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다. 답 $\neg$

momo2000@hanmail.net

0699 p 가 q 이기 위한 필요조건이므로

$q \Rightarrow p \quad \therefore Q \subset P$

① $P \cap Q = Q$

② $P \cup Q = P$

③ $P \neq Q$ 이면 $P \cap Q^c \neq \emptyset$

⑤ $P^c - Q = P^c$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0700 $\neg. R \subset Q$ 이므로 q 는 r 이기 위한 필요조건이다. (참)

$\neg. P \subset R^c$ 이므로 p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄷ. $Q^c \not\subset P^c$ 이므로 $\sim p$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이 아니다.

(거짓)

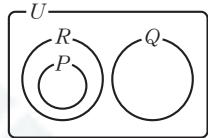
이상에서 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 $\neg, \supset$

0701 $(P-R) \cup (Q-R^c) = \emptyset$ 에서

$P-R = \emptyset, Q-R^c = \emptyset$

$\therefore P \subset R, Q \cap R = \emptyset$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $P \subset R$ 이므로 p 는 r 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P \subset Q^c$ 이므로 $\sim q$ 는 p 이기 위한 필요조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0702 $(x-5)(x-9) \leq 0$ 에서 $5 \leq x \leq 9$

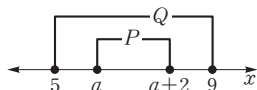
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{x | a \leq x \leq a+2\}, Q = \{x | 5 \leq x \leq 9\}$

q 가 p 이기 위한 필요조건이므로

$p \Rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a \geq 5, a+2 \leq 9 \quad \therefore 5 \leq a \leq 7$

따라서 정수 a 는 5, 6, 7이므로 모든 정수 a 의 값의 합은

$5+6+7=18$

답 18

0703 $x-3 \neq 0$ 은 $x^2+ax-12 \neq 0$ 이기 위한 필요조건이므로 명제 ' $x^2+ax-12 \neq 0$ 이면 $x-3 \neq 0$ 이다.'는 참이다.

따라서 그 대우 ' $x-3=0$ 이면 $x^2+ax-12=0$ 이다.'도 참이다.

$x^2+ax-12=0$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$9+3a-12=0 \quad \therefore a=1$

답 1

0704 $x^2-6x+8 < 0$ 에서 $(x-2)(x-4) < 0$

$\therefore 2 < x < 4$

... 1단계

$|x-a| < 2$ 에서 $-2 < x-a < 2$

$\therefore a-2 < x < a+2$

... 2단계

따라서 $x^2-6x+8 < 0$ 이

$|x-a| < 2$ 이기 위한 충분조건이

되려면 명제 ' $2 < x < 4$ 이면

$a-2 < x < a+2$ 이다.'가 참이어야 하므로 위의 그림에서

$a-2 \leq 2, a+2 \geq 4$

$\therefore 2 \leq a \leq 4$

... 3단계

답 $2 \leq a \leq 4$

채점 요소	비율
1단계 $x^2-6x+8 < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	20 %
2단계 $ x-a < 2$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	20 %
3단계 a 의 값의 범위 구하기	60 %

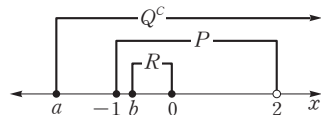
0705 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$P = \{x | -1 \leq x < 2\}, Q = \{x | x < a\}, R = \{x | b \leq x \leq 0\}$

$\sim q$ 는 p 이기 위한 필요조건이고, $\sim p$ 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이므로

$p \Rightarrow \sim q, \sim p \Rightarrow \sim r$

따라서 $P \subset Q^c$ 이고 $P^c \subset R^c$, 즉 $R \subset P$ 이므로 $R \subset P \subset Q^c$ 이때 $Q^c = \{x | x \geq a\}$ 이므로 이를 만족시키도록 세 집합 P, Q^c, R 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $a \leq -1, -1 \leq b \leq 0$

따라서 a 의 최댓값은 $-1, b$ 의 최솟값은 -1 이므로 $a-b$ 의 최댓값은

$-1 - (-1) = 0$

답 0

0706 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q$

$\therefore \sim q \Rightarrow \sim p$

$\sim q$ 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow \sim q$

$\therefore q \Rightarrow \sim r$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r \quad \therefore r \Rightarrow \sim p$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다. 답 ⑤

0707 $\neg$. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 q 는 p 이기 위한 필요조건이지만 충분조건인지는 알 수 없다. (거짓)
 $\neg$. 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow r$ 가 참이다.
 즉 r 는 q 이기 위한 필요조건이다. (참)
 $\supset$. 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow r$ 도 참이다.
 즉 p 는 r 이기 위한 충분조건이다. (참)
 이상에서 항상 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 ④

0708 (가), (나), (다), (라)에서 각각 $p \iff q, s \implies r, q \implies s, r \implies q$ 이다.
 이때 $p \implies q, q \implies s$ 이므로 $p \implies s$
 $s \implies r, r \implies q, q \implies p$ 이므로 $s \implies p$
 따라서 $p \iff s$ 이므로 s 는 p 이기 위한 필요충분조건이다. 답 필요충분조건

0709 n 이 3의 배수가 아니면 momo2000@hanmail.net
 $n = \boxed{(가) 3k-2}$ 또는 $n = 3k-1$ (k 는 자연수)
 로 나타낼 수 있다.
 (i) $n = \boxed{(가) 3k-2}$ 일 때

$$n^2 = (3k-2)^2 = 9k^2 - 12k + 4$$

$$= 3(\boxed{(나) 3k^2 - 4k + 1}) + 1$$

 (ii) $n = 3k-1$ 일 때

$$n^2 = (3k-1)^2 = 9k^2 - 6k + 1$$

$$= 3(\boxed{(다) 3k^2 - 2k}) + 1$$

답 (가) $3k-2$ (나) $3k^2-4k+1$ (다) $3k^2-2k$

0710 주어진 명제의 대우는 ' x, y 가 모두 유리수이면 $x+y$ 는 유리수이다.'이다.
 x, y 가 모두 유리수이면

$$x = \frac{b}{a}, y = \frac{d}{c} \quad (a, b, c, d \text{는 정수}, a \neq 0, c \neq 0)$$

 로 나타낼 수 있으므로

$$x+y = \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{ad+bc}{ac}$$

 이때 $ad+bc$ 와 ac 는 정수이고, $ac \neq 0$ 이므로 $x+y$ 는 유리수이다.
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

0711 $\sqrt{n^2-1} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)의 양변을 제곱하면

$$n^2-1 = \frac{q^2}{p^2} \quad \dots\dots ㉠$$

 ㉠의 좌변은 자연수이고, p 와 q 는 서로소이므로

$$p^2 = \boxed{(가) 1} \quad \dots\dots ㉡$$

 ㉡을 ㉠에 대입하면 $n^2-1 = q^2$

$$n^2-q^2 = \boxed{(나) 1} \quad \therefore (n+q)(n-q) = \boxed{(다) 1}$$

 따라서 $n+q, n-q$ 의 값은 모두 $\boxed{(다) -1}$ 또는 $\boxed{(라) 1}$ 이다. 답 ②

0712 유리수 a 와 무리수 b 의 합 $a+b$ 가 무리수가 아니라고 가정하면 $a+b$ 는 유리수이므로

$$a+b=k \quad (k \text{는 유리수})$$

 로 놓을 수 있다.
 이때 $b=k-a$ 이고 b 는 무리수, $k-a$ 는 유리수이므로 모순이다.
 따라서 $a+b$ 는 무리수이므로 유리수와 무리수의 합은 무리수이다. 답 풀이 참조

0713
$$A-B = (xy+4) - 2(x+y) = xy-2x-2y+4$$

$$= x(y-2) - 2(y-2)$$

$$= (x-2)(y-2)$$

 이때 $x \geq 2, y \geq 2$ 에서 $x-2 \geq 0, y-2 \geq 0$ 이므로

$$(x-2)(y-2) \geq 0$$

 $\therefore A \geq B$ (단, 등호는 $x=2$ 또는 $y=2$ 일 때 성립) 답 ④

0714
$$A^2-B^2 = (\sqrt{a+4})^2 - \left(\frac{a}{4}+2\right)^2$$

$$= a+4 - \left(\frac{a^2}{16} + a + 4\right) = -\frac{a^2}{16} < 0$$

 $\therefore A^2 < B^2$
 이때 $A > 0, B > 0$ 이므로 $A < B$ 답 $A < B$

0715 $\neg. \frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{a(b+1)-b(a+1)}{b(b+1)}$

$$= \frac{a-b}{b(b+1)} > 0$$

 $\therefore \frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$ (거짓)
 $\neg. \frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} = \frac{a^3-b^3}{a^2b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2} > 0$
 $\therefore \frac{a}{b^2} > \frac{b}{a^2}$ (참)
 $\supset. \frac{1+b}{1+a} - \frac{1+a}{1+b} = \frac{(1+b)^2 - (1+a)^2}{(1+a)(1+b)}$

$$= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(1+a)(1+b)} < 0$$

 $\therefore \frac{1+b}{1+a} < \frac{1+a}{1+b}$ (참)
 이상에서 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 ⑤

다른 풀이 $\supset. 1+a > 1+b$ 이므로 $\frac{1+b}{1+a} < 1, \frac{1+a}{1+b} > 1$
 $\therefore \frac{1+b}{1+a} < \frac{1+a}{1+b}$ (참)

0716
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2 = (a+2\sqrt{ab}+b) - (a+b)$$

$$= \boxed{(가) 2\sqrt{ab}} \geq 0$$

 $\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$
 그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0, \sqrt{a+b} \geq 0$ 이므로

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$$

 이때 등호는 $2\sqrt{ab}=0$, 즉 $a=0$ 또는 $\boxed{(나) b=0}$ 일 때 성립한다. 답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $b=0$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{0717} \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
 &= \frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx) \\
 &= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}
 \end{aligned}$$

양의 실수 x, y, z 에 대하여

$$x+y+z>0, (x-y)^2\geq 0, (y-z)^2\geq 0, (z-x)^2\geq 0$$

$$\text{이므로 } x^3+y^3+z^3-3xyz\geq 0$$

$$\therefore x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$$

이때 등호는 $x-y=0, y-z=0, z-x=0$, 즉 $x=y=z$ 일 때 성립한다. 답 풀이 참조

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{0718} \quad \neg. [\text{반례}] a=-4 \text{이면 } a^2+16=-8a \\
 & \neg. a^2+5b^2-b(4a+b)=a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2\geq 0 \\
 & \therefore a^2+5b^2\geq b(4a+b)
 \end{aligned}$$

이때 등호는 $a-2b=0$, 즉 $a=2b$ 일 때 성립한다.

$$\begin{aligned}
 & \text{다. } [\text{반례}] a=1, b=-1 \text{이면 } |a+b|=0, |a-b|=2 \\
 & \therefore |a+b|<|a-b|
 \end{aligned}$$

이상에서 절대부등식인 것은 $\neg$ 뿐이다. 답 $\neg$

$\mathbf{0719} \quad a>0, b>0$ 에서 $2a>0, 3b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\times 3b}=2\sqrt{6ab}$$

$$\text{이때 } 2a+3b=12 \text{ 이므로 } 12\geq 2\sqrt{6ab}$$

$$\therefore \sqrt{6ab}\leq 6$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 6ab\leq 36$$

$$\therefore ab\leq 6 \quad \therefore M=6$$

한편 등호는 $2a=3b$ 일 때 성립하므로 $2a+3b=12$ 에서

$$2a=3b=6 \quad \therefore a=3, b=2$$

$$\text{즉 } \alpha=3, \beta=2 \text{ 이므로}$$

$$M+\alpha+\beta=11$$

답 11

$\mathbf{0720} \quad x>0, y>0$ 에서 $2x>0, 4y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+4y\geq 2\sqrt{2x\times 4y}=2\sqrt{8xy}$$

$$\text{이때 } xy=4 \text{ 이므로}$$

$$2x+4y\geq 2\sqrt{32}=8\sqrt{2} \quad (\text{단, 등호는 } x=2y \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $2x+4y$ 의 최솟값은 $8\sqrt{2}$ 이다. 답 ⑤

$\mathbf{0721} \quad a\neq 0, b\neq 0$ 에서 $a^2>0, 4b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+4b^2\geq 2\sqrt{a^2\times 4b^2}=4|ab|$$

$$\text{이때 } a^2+4b^2=32 \text{ 이므로 } 32\geq 4|ab|, \quad |ab|\leq 8$$

$$\therefore -8\leq ab\leq 8$$

(단, 등호는 $a^2=4b^2$, 즉 $|a|=|2b|$ 일 때 성립)

따라서 ab 의 최댓값은 8, 최솟값은 -8 이므로 구하는 곱은

$$8\times(-8)=-64$$

답 -64

$$\mathbf{0722} \quad \frac{1}{a}+\frac{5}{b}=\frac{5a+b}{ab}=\frac{10}{ab} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $5a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5a+b\geq 2\sqrt{5ab}$$

$$\text{이때 } 5a+b=10 \text{ 이므로 } 10\geq 2\sqrt{5ab}$$

$$\therefore \sqrt{5ab}\leq 5 \quad (\text{단, 등호는 } 5a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 5ab\leq 25$$

$$\therefore ab\leq 5$$

$$\text{즉 } \frac{1}{ab}\geq \frac{1}{5} \text{ 이므로 } \frac{10}{ab}\geq 2$$

따라서 ①에서 $\frac{1}{a}+\frac{5}{b}$ 의 최솟값은 2이다. 답 2

$\mathbf{0723} \quad x>0, y>0$ 에서 $xy>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)=4xy+1+16+\frac{4}{xy}$$

$$=17+4xy+\frac{4}{xy}$$

$$\geq 17+2\sqrt{4xy\times \frac{4}{xy}}$$

$$=17+2\times 4=25$$

(단, 등호는 $4xy=\frac{4}{xy}$, 즉 $xy=1$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 25이다. 답 ⑤

$\mathbf{0724} \quad a>0$ 에서 $a^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a-\frac{3}{a}\right)\left(3a-\frac{1}{a}\right)=3a^2-1-9+\frac{3}{a^2}$$

$$=-10+3a^2+\frac{3}{a^2}$$

$$\geq -10+2\sqrt{3a^2\times \frac{3}{a^2}}$$

$$=-10+2\times 3=-4$$

$$\therefore m=-4$$

한편 등호는 $3a^2=\frac{3}{a^2}$ 일 때 성립하므로

$$a^4=1 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

$$\text{즉 } \alpha=1 \text{ 이므로 } m+\alpha=-3$$

답 -3

$\mathbf{0725} \quad a>0, b>0, c>0, d>0$ 에서 $ad>0, bc>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)=1+\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+1$$

$$=2+\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}$$

$$\geq 2+2\sqrt{\frac{ad}{bc}\times \frac{bc}{ad}}$$

$$=4$$

(단, 등호는 $\frac{ad}{bc}=\frac{bc}{ad}$, 즉 $ad=bc$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 4

0726 $a > 0, b > 0, c > 0$ 에서 $3b+c > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} & (a+3b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{3b+c}\right) \\ &= \{a+(3b+c)\}\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{3b+c}\right) \\ &= 1 + \frac{4a}{3b+c} + \frac{3b+c}{a} + 4 = 5 + \frac{4a}{3b+c} + \frac{3b+c}{a} \\ &\geq 5 + 2\sqrt{\frac{4a}{3b+c} \times \frac{3b+c}{a}} \\ &= 5 + 2 \times 2 = 9 \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{3b+c} = \frac{3b+c}{a}, \text{ 즉 } 2a=3b+c \text{ 일 때 성립}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

답 9

0727 $x > -1$ 에서 $x+1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x+1} &= x+1 + \frac{4}{x+1} - 1 \\ &\geq 2\sqrt{(x+1) \times \frac{4}{x+1}} - 1 \\ &= 2 \times 2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore m=3$$

한편 등호는 $x+1 = \frac{4}{x+1}$ 일 때 성립하므로

$$(x+1)^2 = 4, \quad x+1 = 2 \quad (\because x+1 > 0) \quad \therefore x=1$$

즉 $n=1$ 이므로 $mn=3$

답 ②

0728 $a > 1$ 에서 $a-1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 9a-1 + \frac{1}{a-1} &= 9(a-1) + \frac{1}{a-1} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{9(a-1) \times \frac{1}{a-1}} + 8 \\ &= 2 \times 3 + 8 = 14 \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } 9(a-1) = \frac{1}{a-1}, \text{ 즉 } a = \frac{4}{3} \text{ 일 때 성립}\right) \end{aligned}$$

따라서 $9a-1 + \frac{1}{a-1} \geq k$ 가 항상 성립하려면 $k \leq 14$ 이어야 하므로 k 의 최댓값은 14이다.

답 ④

0729 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \\ &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \times \frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{a}{c} \times \frac{c}{a}} \\ &= 2+2+2=6 \quad (\text{단, 등호는 } a=b=c \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

답 6

채점 요소		비율
1단계	주어진 식 변형하기	50 %
2단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값 구하기	50 %

참고 등호는 각각 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \frac{c}{b} = \frac{b}{c}, \frac{a}{c} = \frac{c}{a}$ 일 때 성립하므로
 $a^2=b^2=c^2 \quad \therefore a=b=c \quad (\because a>0, b>0, c>0)$
 즉 등호가 동시에 성립할 수 있으므로 앞과 같이 풀 수 있다.

0730 $x > 3$ 에서 $x-3 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3x+4}{x-3} &= \frac{x(x-3)+4}{x-3} = x + \frac{4}{x-3} \\ &= x-3 + \frac{4}{x-3} + 3 \\ &\geq 2\sqrt{(x-3) \times \frac{4}{x-3}} + 3 \\ &= 2 \times 2 + 3 = 7 \end{aligned}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } x-3 = \frac{4}{x-3}, \text{ 즉 } x=5 \text{ 일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 7이다.

답 7

0731 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$$

이때 $x^2+y^2=4$ 이므로 $20 \geq (x+2y)^2$

$$\therefore -2\sqrt{5} \leq x+2y \leq 2\sqrt{5} \quad (\text{단, 등호는 } 2x=y \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $x+2y$ 의 최댓값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

답 ②

0732 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}(x^2+y^2) \geq \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right)^2$$

이때 $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 5$ 이므로 $\frac{25}{144}(x^2+y^2) \geq 25$

$$\therefore x^2+y^2 \geq 144 \quad (\text{단, 등호는 } 4x=3y \text{ 일 때 성립})$$

따라서 x^2+y^2 의 최솟값은 144이다.

답 144

0733 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (3x+2y)^2$$

이때 $x^2+y^2=a$ 이므로 $13a \geq (3x+2y)^2$

$$\therefore -\sqrt{13a} \leq 3x+2y \leq \sqrt{13a}$$

$$(\text{단, 등호는 } 2x=3y \text{ 일 때 성립})$$

즉 $3x+2y$ 의 최댓값과 최솟값이 각각 $\sqrt{13a}, -\sqrt{13a}$ 이므로

$$\sqrt{13a} - (-\sqrt{13a}) = 13, \quad 2\sqrt{13a} = 13$$

$$4 \times 13a = 13^2 \quad \therefore a = \frac{13}{4}$$

답 13/4

0734 $a+b+c=2$ 에서 $b+c=2-a$ ㉠

$a^2+b^2+c^2=4$ 에서 $b^2+c^2=4-a^2$ ㉡

b, c 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(b^2+c^2) \geq (b+c)^2$$

㉠, ㉡을 대입하면 $2(4-a^2) \geq (2-a)^2$

$$3a^2-4a-4 \leq 0, \quad (3a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} \leq a \leq 2 \quad (\text{단, 등호는 } b=c \text{ 일 때 성립})$$

따라서 a 의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ 이므로 구하는 합은

$$2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

다른 풀이 $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$ 에 ①, ②를 대입하면
 $(2-a)^2 = (4-a^2) + 2bc \quad \therefore bc = a^2 - 2a \quad \dots \text{ ③}$

①, ③에서 b, c 는 t 에 대한 이차방정식

$$t^2 - (b+c)t + bc = 0, \text{ 즉 } t^2 - (2-a)t + a^2 - 2a = 0$$

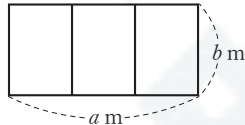
의 두 실근이므로 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2-a)\}^2 - 4 \times 1 \times (a^2 - 2a) \geq 0$$

$$3a^2 - 4a - 4 \leq 0, \quad (3a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} \leq a \leq 2$$

0735 전체 우리의 가로, 세로의 길이를
 a m, 세로의 길이를 b m라 하면 철
 망의 길이가 40 m이므로



$$2a + 4b = 40 \quad \therefore a + 2b = 20$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + 2b \geq 2\sqrt{a \times 2b} = 2\sqrt{2ab}$$

이때 $a + 2b = 20$ 이므로 $20 \geq 2\sqrt{2ab}$

$$\therefore \sqrt{2ab} \leq 10 \quad (\text{단, 등호는 } a = 2b \text{ 일 때 성립})$$

양변을 제곱하면 $2ab \leq 100 \quad \therefore ab \leq 50$

전체 우리의 넓이는 ab m²이므로 넓이의 최댓값은 50 m²이다.

답 ②

0736 소포의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm
 라 하면 소포를 묶는 데 필요한 끈의 길이는

$$2x + 2y + 4 \times 5 = 2x + 2y + 20 \text{ (cm)}$$

그런데 끈의 길이가 100 cm이므로

$$2x + 2y + 20 = 100 \quad \therefore x + y = 40$$

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

이때 $x + y = 40$ 이므로 $40 \geq 2\sqrt{xy}$

$$\therefore \sqrt{xy} \leq 20 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

양변을 제곱하면 $xy \leq 400$

소포의 부피는 $5xy$ cm³이므로 $5xy \leq 2000$

따라서 소포의 최대 부피는 2000 cm³이다. 답 2000 cm³

0737 직사각형의 대각선의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

상자의 12개의 모서리 길이의 합은 $2a + 4b$

a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2 + 4^2)(a^2 + b^2) \geq (2a + 4b)^2$$

이때 $a^2 + b^2 = 20$ 이므로 $20 \times 20 \geq (2a + 4b)^2$

$$\therefore -20 \leq 2a + 4b \leq 20 \quad (\text{단, 등호는 } 2a = b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이므로 $0 < 2a + 4b \leq 20$

따라서 구하는 최댓값은 20이다. 답 20

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 110~113쪽

0738 ㄱ. $\sim p: x^2$ 은 9보다 크거나 같다.

ㄴ. $\sim p: ab \neq 0$ 에서 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

이상에서 조건 p 와 그 부정 $\sim p$ 가 바르게 연결된 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0739 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{2, 3, 4\}, Q = \{4, 5, 6\}$$

조건 ' $\sim p$ 이고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 이고 $P^c = \{1, 5, 6\}$ 이므로

$$P^c \cap Q = \{5, 6\}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$5 + 6 = 11$$

답 11

0740 ① [반례] $x = -3$ 이면 $x \neq 3$ 이지만 $x^2 = 9$ 이다.

② [반례] $x = 0, y = 1$ 이면 $x^2 + y^2 = 1 > 0$ 이지만 $x = 0$ 이다.

③ [반례] $x = 0, y = -1$ 이면 $x > y$ 이지만 $x^2 < y^2$ 이다.

④ $|x| < 2$ 이면 $-2 < x < 2$ 이므로 $x < 2$ 이다.

⑤ [반례] $x = 1, y = -1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$ 이다.

따라서 참인 명제는 ④이다. 답 ④

0741 ④ $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$ 이면 $x + y = 2, xy = -1$ 이

므로 $x + y, xy$ 는 모두 유리수이지만 x, y 는 모두 무리수이다.

답 ④

0742 ③ $P \cap Q = \emptyset$ 이므로 $P \subset Q^c$

따라서 명제 $p \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

답 ③

0743 $x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 = 0$ 에서

$$(x-1)(x-a^2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = a^2$$

$$|x-a| \leq 1 \text{에서 } -1 \leq x-a \leq 1$$

$$\therefore a-1 \leq x \leq a+1$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{1, a^2\}, Q = \{x | a-1 \leq x \leq a+1\}$$

이때 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

$$1 \in Q, a^2 \in Q$$

즉 $a-1 \leq 1 \leq a+1, a-1 \leq a^2 \leq a+1$ 에서

$$0 \leq a \leq 2, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

따라서 정수 a 는 0, 1의 2개이다.

답 2

0744 ① 부정: 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ 이다. (참)

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

② 부정: 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 1 \geq 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=0$ 이면 $x^2 - 1 = -1 < 0$ 이다.

③ 부정: 모든 실수 x 에 대하여 $x + \frac{1}{x} < 1$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1$ 이면 $x + \frac{1}{x} = 2 > 1$ 이다.

④ 부정: 어떤 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 < 0$ 이다. (거짓)

모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 \geq 0$ 이다.

⑤ 부정: 어떤 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| = |x+y|$ 이다. (참)

$x=1, y=2$ 이면 $|x| + |y| = |x+y| = 3$

따라서 그 부정이 참인 명제는 ①, ⑤이다. **답 ①, ⑤**

0745 주어진 명제가 거짓이 되려면 이 명제의 부정이 참이어야 한다.

이때 주어진 명제의 부정은

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + 2k - 1 > 0$ 이다.

위의 명제가 참이 되어야 하므로 이차방정식

$x^2 + 8x + 2k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 1 \times (2k - 1) < 0$$

$$\therefore k > \frac{17}{2}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 9이다. **답 9**

0746 ① [반례] 오른쪽 그림의 두 삼각형은 넓이가 6으로 같지만 합동이 아니다.



주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② [반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x > y$ 이지만 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

③ $n=2k$ (k 는 자연수)라 하면

$n(n+2) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$ 에서 k 와 $k+1$ 중 적어도 하나는 짝수이므로 $n(n+2)$ 는 8의 배수이다.

또 $n, n+1, n+2$ 중 적어도 하나는 3의 배수이므로

$n(n+1)(n+2)$ 는 3의 배수이다.

즉 $n(n+1)(n+2)$ 는 8의 배수이면서 3의 배수이므로 24의 배수이다.

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ [반례] $x=2, y=\frac{1}{2}$ 이면 $xy=1$ 은 정수이지만 y 는 정수가 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

⑤ [반례] 순환소수는 무한소수이지만 유리수이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

따라서 그 대우가 참인 명제는 ③이다. **답 ③**

0747 ㄷ. 명제 $s \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim s$ 도 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim s$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim s$ 도 참이다.

ㄹ. 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow r$ 도 참이다.

따라서 두 명제 $s \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 참이므로 명제 $s \rightarrow r$ 도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄷ, ㄹ이다. **답 ㄷ, ㄹ**

0748 네 조건 p, q, r, s 를

p : A가 안경을 썼다., q : B가 안경을 썼다.,

r : C가 안경을 썼다., s : D가 안경을 썼다.

로 놓으면 (ㄴ), (ㄷ), (ㄹ)에 의하여 세 명제 $s \rightarrow r, \sim p \rightarrow \sim r,$

$\sim s \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim r \rightarrow \sim s,$

$r \rightarrow p, q \rightarrow s$ 도 참이다.

즉 세 명제 $q \rightarrow s, s \rightarrow r, r \rightarrow p$ 가 참이므로

B가 안경을 썼으면 D, C, A도 안경을 써야 하고,

D가 안경을 썼으면 C, A도 안경을 써야 한다.

이는 (가)에 모순이므로 B, D는 안경을 쓰지 않았다.

따라서 안경을 쓴 학생은 A, C이다. **답 A, C**

0749 ㄴ. [$\rightarrow$ 의 반례] $A=\{1, 2\}, B=\{1\}, C=\{2, 3\}$ 이면

$B \cup C = \{1, 2, 3\}$ 이므로 $A \subset (B \cup C)$ 이지만 $A \not\subset B, A \not\subset C$ 이다.

$A \subset B$ 또는 $A \subset C$ 이면 $A \subset (B \cup C)$ 이므로

$$q \Rightarrow p$$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. m, n 이 모두 짝수이면 $m+n$ 은 짝수이므로

$$p \Rightarrow q$$

[$\leftarrow$ 의 반례] $m=1, n=3$ 이면 $m+n=4$ 는 짝수이지만 m, n 은 모두 홀수이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

이상에서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다. **답 ㄴ**

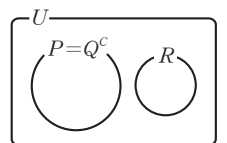
0750 p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요충분조건이므로

$$p \Leftrightarrow \sim q \quad \therefore P = Q^C$$

r 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이므로

$$r \Rightarrow \sim p \quad \therefore R \subset P^C$$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\textcircled{1} R \not\subset P \quad \textcircled{3} R \cap Q^C = \emptyset$$

$$\textcircled{4} Q \cap R = R \quad \textcircled{5} Q^C - R = Q^C$$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다. **답 ②**

0751 $(x+k)(x-k) < 0$ 에서 $-k < x < k$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid 3 \leq x \leq 4\}, Q = \{x \mid -k < x < k\}$$

이때 p 가 q 이기 위한 충분조건, 즉 $p \Rightarrow q$ 가 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른

쪽 그림과 같으므로

$$-k < 3, k > 4 \quad \therefore k > 4$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 5이다.

답 5

0752 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow q \quad \therefore \sim q \Rightarrow \sim p$$

따라서 ' $x-a=0$ 이면 $2x^2-x-1=0$ 이다.'가 참이므로

$2x^2-x-1=0$ 에 $x-a=0$, 즉 $x=a$ 를 대입하면

$$2a^2-a-1=0, \quad (2a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

또 q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$$r \Rightarrow q \quad \therefore \sim q \Rightarrow \sim r$$

따라서 ' $x-a=0$ 이면 $bx^2-3x+5=0$ 이다.'가 참이므로

$bx^2-3x+5=0$ 에 $x-a=0$, 즉 $x=1$ 을 대입하면

$$b-3+5=0 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore a-b=3$$

답 3

0753 p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$

p 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow p$

q 는 s 이기 위한 필요충분조건이므로 $q \Leftrightarrow s$

$\therefore q \Rightarrow s, s \Rightarrow p$ 이므로

$$q \Rightarrow p$$

즉 q 는 p 이기 위한 충분조건이지만 필요조건인지는 알 수 없다. (거짓)

$\therefore q \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로

$$q \Rightarrow r$$

즉 r 는 q 이기 위한 필요조건이다. (참)

$\therefore s \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로

$$s \Rightarrow r$$

즉 s 는 r 이기 위한 충분조건이다. (참)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0754 $x = \frac{m}{M}, y = \frac{n}{N}$ (m 과 M, n 과 N 은 각각 서로소인 자연수)이라 하면 $x^2 + y^2 = 3$ 에서

$$\frac{m^2}{M^2} + \frac{n^2}{N^2} = 3, \quad \frac{m^2}{M^2} = 3 - \frac{n^2}{N^2}$$

$$\therefore \frac{m^2 N^2}{M^2} = \boxed{3N^2} - n^2 \quad \dots\dots ①$$

$\boxed{3N^2} - n^2$ 은 정수이고 m 과 M 은 서로소이므로

$N = kM$ (k 는 정수)이어야 한다.

즉 ①에서 $(km)^2 + n^2 = \boxed{3N^2}$ 이고

$$km = 3a + r, n = 3b + s$$

(a, b, r, s 는 정수이고, $0 \leq r < 3, 0 \leq s < 3$)

라 하면

$$\begin{aligned} (km)^2 + n^2 &= (3a+r)^2 + (3b+s)^2 \\ &= 3(3a^2 + 2ar + 3b^2 + 2bs) + \boxed{3r^2} + s^2 \end{aligned}$$

그런데 $(km)^2 + n^2$ 은 ③의 배수이므로 $r=s=0$ 이어야 한다.

즉 두 수 km, n 은 ③의 배수이므로 N 도 ③의 배수이다.

따라서 $f(N) = 3N^2, g(r) = r^2, a=3$ 이므로

$$a + \frac{f(4)}{g(2)} = 3 + \frac{48}{4} = 15$$

답 15

RPM비법노트

$km = 3a + r, n = 3b + s$ 에 $r=0, s=0$ 을 각각 대입하면

$$km = 3a, n = 3b$$

이므로 $(km)^2 + n^2 = 3N^2$ 에서

$$(3a)^2 + (3b)^2 = 3N^2, \quad 9(a^2 + b^2) = 3N^2$$

$$\therefore N^2 = 3(a^2 + b^2)$$

즉 N^2 이 3의 배수이므로 N 도 3의 배수이다.

0755 $x > 0, y > 0$ 에서 $x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x^2 + 8y^2 \geq 2\sqrt{2x^2 \times 8y^2} = 8xy$$

이때 $2x^2 + 8y^2 = 5$ 이므로 $5 \geq 8xy$

$$\therefore xy \leq \frac{5}{8} \quad \therefore r = \frac{5}{8}$$

한편 등호는 $2x^2 = 8y^2$ 일 때 성립하므로 $2x^2 + 8y^2 = 5$ 에서

$$2x^2 = 8y^2 = \frac{5}{2}$$

$$x^2 = \frac{5}{4}, y^2 = \frac{5}{16}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}}{2}, y = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad (\because x > 0, y > 0)$$

즉 $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{\sqrt{5}}{4}$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} + r = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$$

답 ②

0756 $a > 0, b > 0$ 에서 $ab > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2a + \frac{1}{3b}\right)\left(\frac{1}{a} + 6b\right) = 2 + 12ab + \frac{1}{3ab} + 2$$

$$= 4 + 12ab + \frac{1}{3ab}$$

$$\geq 4 + 2\sqrt{12ab \times \frac{1}{3ab}}$$

$$= 4 + 2 \times 2 = 8$$

(단, 등호는 $12ab = \frac{1}{3ab}$, 즉 $ab = \frac{1}{6}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

답 ②

0757 점 P에서의 접선의 방정식은 $ax+by=16$

$$\therefore A\left(\frac{16}{a}, 0\right), B\left(0, \frac{16}{b}\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{a} \times \frac{16}{b} = \frac{128}{ab} \quad \dots\dots ①$$

한편 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위에 있으므로 $a^2+b^2=16$
 $a>0, b>0$ 에서 $a^2>0, b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

이때 $a^2+b^2=16$ 이므로 $16 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq 8 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$\text{즉 } \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{8} \text{ 이므로 } \frac{128}{ab} \geq 16$$

따라서 ①에서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 16이다. **답 16**

0758 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로

$$2x+2y=20 \quad \therefore x+y=10$$

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2\} \{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2\} \geq (\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2$$

$$\therefore 5(x+y) \geq (\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2$$

이때 $x+y=10$ 이므로 $50 \geq (\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2$

$$\therefore -5\sqrt{2} \leq \sqrt{3x} + \sqrt{2y} \leq 5\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $\sqrt{2x} = \sqrt{3y}$ 일 때 성립)

그런데 $\sqrt{3x} > 0, \sqrt{2y} > 0$ 이므로

$$0 < \sqrt{3x} + \sqrt{2y} \leq 5\sqrt{2}$$

따라서 $\sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ 의 최댓값은 $5\sqrt{2}$ 이다. **답 $5\sqrt{2}$**

0759 명제 ' $a+b>1$ 이면 $a \geq 5$ 또는 $b \geq k$ 이다.'가 참이므로
 그 대우 ' $a<5$ 이고 $b<k$ 이면 $a+b \leq 1$ 이다.'가 참이다. ... 1단계

이때 $a<5, b<k$ 에서 $a+b < 5+k$ 이므로

$$5+k \leq 1 \quad \therefore k \leq -4 \quad \dots 2\text{단계}$$

따라서 k 의 최댓값은 -4 이다. ... 3단계 **답 -4**

채점 요소	비율
1단계 주어진 명제의 대우가 참임을 알기	40 %
2단계 k 의 값의 범위 구하기	50 %
3단계 k 의 최댓값 구하기	10 %

0760 $|x-2| \leq a$ 에서 $-a \leq x-2 \leq a$ ($\because a \geq 0$)

$$\therefore -a+2 \leq x \leq a+2$$

$|x| > 4$ 에서 $x < -4$ 또는 $x > 4$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x | -a+2 \leq x \leq a+2\}, Q = \{x | x \leq b\},$$

$$R = \{x | x < -4 \text{ 또는 } x > 4\}$$

q 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이고 p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이므로

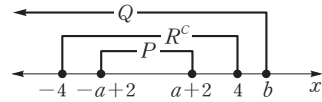
$$\sim r \implies q, p \implies \sim r$$

086 정답 및 풀이

즉 $R^C \subset Q, P \subset R^C$ 이므로

$$P \subset R^C \subset Q \quad \dots 1\text{단계}$$

이때 $R^C = \{x | -4 \leq x \leq 4\}$ 이므로 이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R^C 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-a+2 \geq -4, a+2 \leq 4, b \geq 4$ 이므로

$$0 \leq a \leq 2 \quad (\because a \geq 0), b \geq 4 \quad \dots 2\text{단계}$$

따라서 a 의 최댓값은 2, b 의 최솟값은 4이므로 $b-a$ 의 최솟값은

$$4-2=2 \quad \dots 3\text{단계}$$

답 2

채점 요소	비율
1단계 세 조건 p, q, r 의 진리집합 사이의 포함 관계 구하기	40 %
2단계 a, b 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계 $b-a$ 의 최솟값 구하기	20 %

0761 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 - 4a + \frac{b}{a} + \frac{9a}{b} = (a-2)^2 + \frac{b}{a} + \frac{9a}{b} - 4$$

$$\geq (a-2)^2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{9a}{b}} - 4$$

$$= (a-2)^2 + 2 \times 3 - 4$$

$$= (a-2)^2 + 2 \quad \dots 1\text{단계}$$

따라서 주어진 식은 $a=2$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

$$\therefore m=2 \quad \dots 2\text{단계}$$

한편 등호는 $\frac{b}{a} = \frac{9a}{b}$, 즉 $b=3a$ 일 때 성립하므로

$$a=2 \text{를 } b=3a \text{에 대입하면 } b=6$$

즉 $a=2, \beta=6$ 이므로 ... 3단계

$$m+\alpha+\beta=10 \quad \dots 4\text{단계}$$

답 10

채점 요소	비율
1단계 산술평균과 기하평균의 관계 이용하기	50 %
2단계 m 의 값 구하기	20 %
3단계 α, β 의 값 구하기	20 %
4단계 $m+\alpha+\beta$ 의 값 구하기	10 %

0762 x, y 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2 \quad \dots 1\text{단계}$$

이때 $x^2+y^2=2$ 이므로 $10 \geq (2x+y)^2$

$$\therefore -\sqrt{10} \leq 2x+y \leq \sqrt{10} \quad (\text{단, 등호는 } x=2y \text{ 일 때 성립})$$

... 2단계

따라서 $2x+y$ 의 최댓값은 $\sqrt{10}$, 최솟값은 $-\sqrt{10}$ 이므로

$$M=\sqrt{10}, m=-\sqrt{10}$$

$$\therefore M^2+m^2=20 \quad \dots 3\text{단계}$$

답 20

채점 요소	비율
1단계 코사-슈바르츠의 부등식 이용하기	30 %
2단계 $2x+y$ 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계 M^2+m^2 의 값 구하기	30 %

0763 전략 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $P \subset Q$ 임을 이용한다.

(가), (나)에서 두 명제 $q \rightarrow p, \sim p \rightarrow q$ 가 참이므로

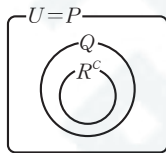
$$P^c \subset Q \subset P \quad \therefore U = P$$

또 (다)에서 $\sim q \rightarrow r$ 가 참이므로

$$Q^c \subset R \quad \therefore R^c \subset Q$$

$$\therefore R^c \subset Q \subset P$$

따라서 세 집합 P, Q, R^c 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P^c = \emptyset$ 이므로 $Q - P^c = Q$ (거짓)

ㄴ. $P = U$ 이므로 $R \subset P$ (참)

ㄷ. $P \cap R = U \cap R = R$ 이므로

$$Q^c \subset (P \cap R) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

참고 $P^c \subset P$ 이라면 $P^c = \emptyset$ 이어야 하므로 $P = U$ 이다.

0764 전략 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 임을 이용한다.

$$|x-k| \leq 2 \text{에서} \quad -2 \leq x-k \leq 2$$

$$\therefore k-2 \leq x \leq k+2$$

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \text{에서} \quad (x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | k-2 \leq x \leq k+2\}, Q = \{x | -1 \leq x \leq 5\}$$

이때 명제 $p \rightarrow q$ 와 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 모두 거짓이 되려면

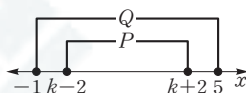
$P \not\subset Q$ 이고 $P \not\subset Q^c$ 이어야 한다.

$P \subset Q$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위

는 오른쪽 그림에서

$$k-2 \geq -1, k+2 \leq 5$$

$$\therefore 1 \leq k \leq 3$$

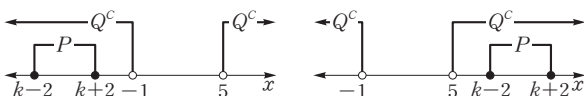


따라서 $P \not\subset Q$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$k < 1 \text{ 또는 } k > 3$$

..... ㉠

한편 $Q^c = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 5\}$ 이므로 $P \subset Q^c$ 인 경우는 다음 그림과 같다.



따라서 $P \subset Q^c$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$k+2 < -1 \text{ 또는 } k-2 > 5$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 7$$

즉 $P \not\subset Q$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$-3 \leq k \leq 7$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 명제 $p \rightarrow q$ 와 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 모두 거짓이 되도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-3 \leq k < 1 \text{ 또는 } 3 < k \leq 7$$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 4, 5, 6, 7$ 이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-3 + (-2) + (-1) + 0 + 4 + 5 + 6 + 7 = 16$$

답 ㉢

0765 전략 $\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle APC$ 임을 이용하여 $\overline{PM}$ 과 $\overline{PN}$ 사이의 관계식을 구하고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PM} = x, \overline{PN} = y$

라 하고 $\overline{AP}$ 를 그으면

$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle APC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times x + \frac{1}{2} \times 4 \times y$$

$$\therefore 3x + 4y = 6$$

이때 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}} = \frac{3}{x} + \frac{4}{y}$ 에 $3x + 4y$ 를 곱하면

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y}\right)(3x + 4y) = 9 + \frac{12y}{x} + \frac{12x}{y} + 16$$

$$= \frac{12y}{x} + \frac{12x}{y} + 25 \quad \dots\dots ㉠$$

$\frac{y}{x} > 0, \frac{x}{y} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{12y}{x} + \frac{12x}{y} + 25 \geq 2\sqrt{\frac{12y}{x} \times \frac{12x}{y}} + 25$$

$$= 2 \times 12 + 25 = 49$$

(단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$3x + 4y = 6$ 이므로 ㉠에서

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y}\right) \times 6 \geq 49 \quad \therefore \frac{3}{x} + \frac{4}{y} \geq \frac{49}{6}$$

따라서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$ 의 최솟값은 $\frac{49}{6}$ 이다.

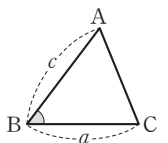
답 $\frac{49}{6}$

RPM 비법 노트

삼각형의 넓이

$\triangle ABC$ 에서 $\angle B$ 가 예각일 때

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ac \sin B$$



08 함수

교과서 문제 정복하기

• 본책 117쪽, 119쪽

0766 X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 0, 2의 2개이므로 함수가 아니다. **답** 함수가 아니다.

0767 X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

이때 정의역은 $\{a, b, c, d\}$, 공역은 $\{0, 1, 2\}$, 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다. **답** 풀이 참조

0768 X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

이때 정의역은 $\{-1, 0, 1\}$, 공역은 $\{5, 7, 8, 9\}$, 치역은 $\{5, 8, 9\}$ 이다. **답** 풀이 참조

0769 X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다. **답** 함수가 아니다.

0770 **답** 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \text{는 실수}\}$

0771 함수 $y = -x^2 + 6x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
또 $-x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9 \leq 9$ 에서 $y \leq 9$
따라서 치역은 $\{y|y \leq 9\}$ 이다.

답 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \leq 9\}$

0772 함수 $y = |x| + 2$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
또 $|x| \geq 0$ 에서 $|x| + 2 \geq 2 \quad \therefore y \geq 2$
따라서 치역은 $\{y|y \geq 2\}$ 이다.

답 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \geq 2\}$

0773 **답** 정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$, 치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$

0774 $f(-1) = 1, g(-1) = -1$ 이므로

$$f(-1) \neq g(-1) \quad \therefore f \neq g$$

답 서로 같은 함수가 아니다.

0775 $f(-1) = g(-1) = 2, f(0) = g(0) = 1,$

$f(1) = g(1) = 2$ 이므로

$$f = g$$

답 서로 같은 함수이다.

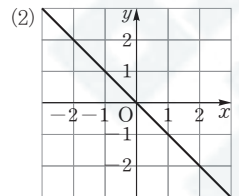
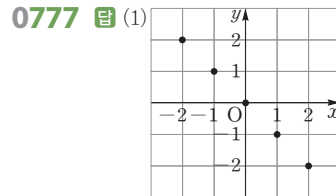
0776 $f(-1) = g(-1) = -2, f(0) = g(0) = 0,$

$f(1) = g(1) = 2$ 이므로

$$f = g$$

답 서로 같은 함수이다.

088 정답 및 풀이



0778 **답** (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄴ (4) ㄷ

0779 **답** (1) ㄷ, ㄹ (2) ㄷ, ㄹ (3) ㄷ (4) ㄱ

0780 (1) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 3$

(2) $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(8) = 2$

(3) $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(3) = 7$

(4) $(f \circ g)(7) = f(g(7)) = f(1) = 6$

답 (1) 3 (2) 2 (3) 7 (4) 6

0781 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-1)$

$$= (3x-1)^2 + 2$$

$$= 9x^2 - 6x + 3$$

답 $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 6x + 3$

0782 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2)$

$$= 3(x^2+2) - 1$$

$$= 3x^2 + 5$$

답 $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 5$

0783 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x-1)$

$$= 3(3x-1) - 1$$

$$= 9x - 4$$

답 $(f \circ f)(x) = 9x - 4$

0784 $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2+2)$

$$= (x^2+2)^2 + 2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 6$$

답 $(g \circ g)(x) = x^4 + 4x^2 + 6$

0785 ㄱ, ㄷ. 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

ㄴ. 집합 X 의 원소 a, b, c 가 모두 집합 Y 의 원소 1에 대응하므로 일대일대응이 아니다.

따라서 역함수가 존재하지 않는다.

ㄹ. 집합 X 의 원소 $-1, 1$ 이 모두 집합 Y 의 원소 b 에 대응하므로 일대일대응이 아니다.

따라서 역함수가 존재하지 않는다.

이상에서 역함수가 존재하는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0786 (1) $f^{-1}(5)=a$ 에서 $f(a)=5$ 이므로

$$a-2=5 \quad \therefore a=7$$

(2) $f^{-1}(a)=1$ 에서 $f(1)=a$ 이므로

$$a=1-2=-1$$

답 (1) 7 (2) -1

0787 함수 $y=2x-2$ 는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2x-2$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$2x=y+2 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y+1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=\frac{1}{2}x+1 \quad \text{답 } y=\frac{1}{2}x+1$$

0788 함수 $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}$ 은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$\frac{1}{4}x=y-\frac{3}{8} \quad \therefore x=4y-\frac{3}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=4x-\frac{3}{2} \quad \text{답 } y=4x-\frac{3}{2}$$

0789 (2) $(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=8$

답 (1) 3 (2) 8 (3) 3 (4) 4

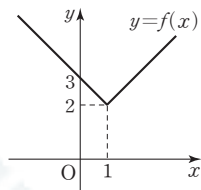
0790 (1) $x \geq 1$ 일 때, $x-1 \geq 0$ 이므로

$$f(x)=(x-1)+2=x+1$$

(2) $x < 1$ 일 때, $x-1 < 0$ 이므로

$$f(x)=-(x-1)+2=-x+3$$

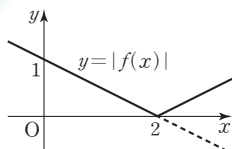
(3) $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0791 $y=|f(x)|$ 의 그래프는

$y=f(x)$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0792 $y=f(|x|)$ 의 그래프

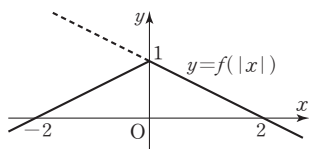
는 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$x \geq 0$ 인 부분만 남기고, $x < 0$

인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분의 그

래프를 y 축에 대하여 대칭이동

하여 그린 것이므로 위의 그림과 같다.

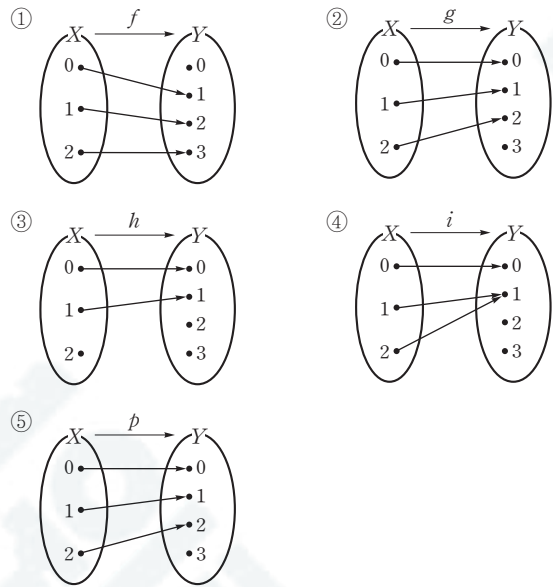


답 풀이 참조

유형 익히기

• 본책 120~131쪽

0793 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



③ X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 ③

0794 ① 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 그래프가 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.

②, ③ 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

④ 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

⑤ 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

따라서 함수의 그래프인 것은 ④이다.

답 ④

0795 ① $0 \leq x \leq 2$ 에서 $-4 \leq -2x \leq 0$

$$-5 \leq -2x-1 \leq -1 \quad \therefore -5 \leq f(x) \leq -1$$

② $0 \leq x \leq 2$ 에서 $-2 \leq -x \leq 0$

$$1 \leq -x+3 \leq 3 \quad \therefore 1 \leq f(x) \leq 3$$

③ $0 \leq x \leq 2$ 에서 $-1 \leq x-1 \leq 1$

$$\therefore -1 \leq f(x) \leq 1$$

④ $0 \leq x \leq 2$ 에서 $0 \leq |x| \leq 2$

$$1 \leq |x|+1 \leq 3 \quad \therefore 1 \leq f(x) \leq 3$$

⑤ $0 \leq x \leq 2$ 에서 $0 \leq x^2 \leq 4$

$$-3 \leq x^2-3 \leq 1 \quad \therefore -3 \leq f(x) \leq 1$$

따라서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 ③이다.

답 ③

0796 2는 유리수이므로 $f(2)=2+1=3$

$\sqrt{5}-3$ 은 무리수이므로

$$f(\sqrt{5}-3)=-(\sqrt{5}-3)=-\sqrt{5}+3$$

$$\therefore f(2)-f(\sqrt{5}-3)=3-(-\sqrt{5}+3)=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

0797 $f(-2)=3 \times (-2)-3=-9$

$f(3)=-3+5=2$

$\therefore f(-2)+f(3)=-9+2=-7$

답 -7

0798 $\frac{x-4}{2}=-3$ 에서

$x-4=-6 \quad \therefore x=-2$

$f\left(\frac{x-4}{2}\right)=4x-2$ 에 $x=-2$ 를 대입하면

$f(-3)=4 \times (-2)-2=-10$

답 -10

다른 풀이 $\frac{x-4}{2}=t$ 로 놓으면 $x=2t+4$

$\therefore f(t)=4(2t+4)-2=8t+14$

따라서 $f(x)=8x+14$ 이므로

$f(-3)=8 \times (-3)+14=-10$

0799 $f(2)=2-1=1$

$f(18)=f(15)=\cdots=f(3)=3-1=2$

$\therefore f(2)+f(18)=1+2=3$

답 3

0800 (i) $a>0$ 일 때

$f(x)=ax+b$ 의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-2)=-2, f(3)=3$

$-2a+b=-2, 3a+b=3$

$\therefore a=1, b=0$

그런데 $ab=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$ 일 때

$f(x)=ax+b$ 의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-2)=3, f(3)=-2$

$-2a+b=3, 3a+b=-2$

$\therefore a=-1, b=1$

(i), (ii)에서 $a=-1, b=1$

$\therefore a-b=-2$

답 -2

0801 $x^2+5x+2=-4$ 에서 $x^2+5x+6=0$

$(x+3)(x+2)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

$x^2+5x+2=8$ 에서 $x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0 \quad \therefore x=-6$ 또는 $x=1$

따라서 정의역의 원소가 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

0802 $f(-1)=a \times (-1)^2+1=a+1,$

$f(0)=a \times 0^2+1=1,$

$f(1)=a \times 1^2+1=a+1,$

$f(2)=a \times 2^2+1=4a+1$

이때 $a=0$ 이면 치역은 $\{1\}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 치역은

$\{a+1, 1, 4a+1\}$

치역의 모든 원소의 합이 18이므로

$(a+1)+1+(4a+1)=18$

$5a+3=18 \quad \therefore a=3$

답 3

0803 (i) $a>0$ 일 때

치역이 $\{y \mid -2a-1 \leq y \leq a-1\}$ 이므로

$-2a-1 \geq -3, a-1 \leq 1$

$\therefore a \leq 1$

이때 $a>0$ 이므로 $0 < a \leq 1$

... 1단계

(ii) $a<0$ 일 때

치역이 $\{y \mid a-1 \leq y \leq -2a-1\}$ 이므로

$a-1 \geq -3, -2a-1 \leq 1$

$\therefore a \geq -1$

이때 $a<0$ 이므로 $-1 \leq a < 0$

... 2단계

(i), (ii)에서 $-1 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 1$

따라서 $M=1, m=-1$ 이므로

$Mm=-1$

... 3단계

답 -1

	채점 요소	비율
1단계	$a>0$ 일 때, a 의 값의 범위 구하기	40 %
2단계	$a<0$ 일 때, a 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	Mm 의 값 구하기	20 %

0804 $f(-1)=g(-1)$ 에서

$3+1-1=-a+b \quad \therefore a-b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$

$f(1)=g(1)$ 에서

$3-1-1=a+b \quad \therefore a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

$\therefore ab=-2$

답 -2

0805 $\neg, f(-2)=g(-2)=-8, f(0)=g(0)=0,$

$f(2)=g(2)=8$ 이므로 $f=g$

$\neg, f(0)=-1, g(0)=1$ 이므로 $f(0) \neq g(0)$

$\therefore f \neq g$

$\neg, f(-2)=g(-2)=0, f(0)=g(0)=2, f(2)=g(2)=4$

이므로 $f=g$

이상에서 $f=g$ 인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

0806 $f(-3)=g(-3)$ 에서

$9-6+2=3+b \quad \therefore b=2$

$\therefore g(x)=-x+2$

$f(a)=g(a)$ 에서

$a^2+2a+2=-a+2, \quad a^2+3a=0$

$a(a+3)=0 \quad \therefore a=0 (\because a \neq -3)$

$\therefore X=\{-3, 0\}$

이때 $g(-3)=5, g(0)=2$ 이므로 함수 g 의 치역은 $\{2, 5\}$ 이다.

답 $\{2, 5\}$

0807 $f(x)=g(x)$ 에서 $x^3-3x+9=4x+3$

$x^3-7x+6=0, \quad (x+3)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

... 1단계

이때 집합 X 의 모든 원소가 양수이므로 X 는 집합 $\{1, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^2 - 1 = 3$$

... 2단계

답 3

	채점 요소	비율
1단계	$f(x)=g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값 구하기	50 %
2단계	집합 X 의 개수 구하기	50 %

0808 ㄴ. $f(x) = |x| + 1$ 이라 하면 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 일 때,

$x_1 \neq x_2$ 이지만

$$f(x_1) = |-1| + 1 = 2, f(x_2) = |1| + 1 = 2$$

$$\therefore f(x_1) = f(x_2)$$

따라서 함수 $y = |x| + 1$ 은 일대일대응이 아니다.

ㄷ. $f(x) = 2x^2 - 4x$ 라 하면 $x_1 = 0, x_2 = 2$ 일 때, $x_1 \neq x_2$ 이지만

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 8 - 8 = 0$$

$$\therefore f(x_1) = f(x_2)$$

따라서 함수 $y = 2x^2 - 4x$ 는 일대일대응이 아니다.

이상에서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0809 ①, ④, ⑤ 실수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일대응이 아니다.

② 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 $\{y|y \geq 0\}$ 이므로 일대일대응이 아니다.

③ 모든 실수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

따라서 일대일대응의 그래프인 것은 ③이다.

답 ③

0810 ㄱ. 실수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄴ. 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 $\{y|y \leq 0\}$ 이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

이상에서 일대일함수이지만 일대일대응은 아닌 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0811 $a < 0$ 이고 함수 $f(x) = ax + b$ 가 일대일대응이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1, 3), (1, -1)$ 을 지나야 한다.

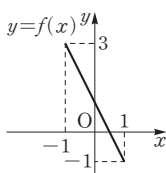
즉 $f(-1)=3, f(1)=-1$ 이므로

$$-a+b=3, a+b=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=1$

$$\therefore ab=-2$$

답 -2



$$\mathbf{0812} \quad f(x) = x^2 + 4x + k = (x+2)^2 + k - 4$$

이므로 $x \geq -2$ 일 때 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 f 가 일대일대응이면 $f(-1)=5$ 이므로

$$1 - 4 + k = 5 \quad \therefore k = 8$$

답 8

0813 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 $x \geq 1$ 일 때와 $x < 1$ 일 때의 직선 $y=f(x)$ 의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉 $(3-a)(2+a) > 0$ 이므로

$$(a+2)(a-3) < 0 \quad \therefore -2 < a < 3$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

답 4

참고 $f(1)=20$ 이고, 직선 $y=(2+a)x-a$ 도 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 치역과 공역이 같다.

$$\mathbf{0814} \quad f(x) = x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$$

함수 f 가 일대일대응이 되려면 $x \geq k$ 일 때 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가해야 하므로

$$k \geq 3 \quad \dots\dots ㉠$$

또 치역과 공역이 같아야 하므로 $f(k)=k$

$$k^2 - 6k = k, \quad k^2 - 7k = 0$$

$$k(k-7) = 0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=7 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $k=7$

답 ④

$$\mathbf{0815} \quad \text{함수 } f \text{는 항등함수이므로} \quad f(2)=2, f(10)=10$$

$$f(2)+g(2)=6 \text{에서}$$

$$2+g(2)=6 \quad \therefore g(2)=4$$

$$\text{함수 } g \text{는 상수함수이므로} \quad g(10)=g(2)=4$$

$$\therefore f(10)+g(10)=10+4=14$$

답 14

0816 함수 f 는 상수함수이므로 모든 자연수 x 에 대하여

$$f(x)=f(1)=4$$

$$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+\dots+f(30)=4 \times 15=60$$

답 60

0817 함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로 $f(x)=x$ 이어야 한다.

따라서 $\frac{x^3}{8} - x = x$ 에서

$$x^3 - 16x = 0, \quad x(x+4)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

즉 집합 X 는 집합 $\{-4, 0, 4\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 집합이므로 집합 X 가 될 수 있는 것은

$$\{-4, 0\}, \{-4, 4\}, \{0, 4\}$$

$$\text{답 } \{-4, 0\}, \{-4, 4\}, \{0, 4\}$$

0818 함수 g 는 항등함수이므로

$$g(4)=4, g(8)=8$$

$$f(8)=g(4)=h(2) \text{에서} \quad f(8)=h(2)=4$$

$$f(8)f(2)=f(4) \text{에서} \quad 4f(2)=f(4)$$

이때 함수 f 는 일대일대응이므로

$$f(2)=2, f(4)=8$$

또 함수 h 는 상수함수이므로

$$h(4)=h(2)=4$$

$$\therefore f(2)+g(8)+h(4)=2+8+4=14$$

답 14

0819 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의

함수의 개수는 $4^4=256$

일대일대응의 개수는 ${}_4P_4=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$

항등함수의 개수는 1

상수함수의 개수는 4

따라서 $p=256, q=24, r=1, s=4$ 이므로

$$p+q+r+s=285$$

답 285

0820 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y=\{a, b\}$ 로의

함수의 개수는 $2^4=16$

치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$ 인 함수의 개수는 2

따라서 공역과 치역이 같은 함수의 개수는

$$16-2=14$$

답 ⑤

0821 집합 Y 의 원소의 개수를 $m(m \geq 3)$ 이라 하면 집합

$X=\{1, 2, 3\}$ 에서 집합 Y 로의 일대일함수의 개수가 60이므로

$${}_mP_3=60, \quad m(m-1)(m-2)=5 \times 4 \times 3$$

$$\therefore m=5$$

... 1단계

따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$5^3=125$$

... 2단계

답 125

	채점 요소	비율
1단계	집합 Y 의 원소의 개수 구하기	60 %
2단계	집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수 구하기	40 %

0822 함수 $f: A \rightarrow B$ 가 일대일대응이고 $n(U)=6$ 이므로

조건 (가), (나)에서

$$n(A)=n(B)=3$$

집합 A 의 원소를 정하는 경우의 수는 전체집합 U 의 6개의 원소

중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_6C_3=\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}=20$$

이때 집합 B 는 전체집합 U 의 원소 중에서 집합 A 의 원소를 제외한 것을 모두 원소로 갖는 집합이므로 집합 B 의 원소를 정하는 경우의 수는 1이다.

각 경우에 집합 A 에서 집합 B 로의 일대일대응의 개수는

$${}_3P_3=3 \times 2 \times 1=6$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$20 \times 1 \times 6=120$$

답 120

0823 $g(2)=2^2-2=2$ 이므로

$$(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=-2 \times 2+5=1$$

092 정답 및 풀이

$f(0)=3$ 이므로

$$(g \circ f)(0)=g(f(0))=g(3)=9-2=7$$

$$\therefore (f \circ g)(2)+(g \circ f)(0)=1+7=8$$

답 ⑤

0824 $(h \circ (g \circ f))(1)=((h \circ g) \circ f)(1) \leftarrow$ 합성함수의

$$=(h \circ g)(f(1))$$

결합법칙

$$=(h \circ g)(-1) \leftarrow f(1)=1-2=-1$$

$$=-4+3=-1$$

답 ②

0825 $(f \circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-a+4)$

$$=3(-a+4)-2$$

$$=-3a+10$$

즉 $-3a+10=7$ 이므로 $-3a=-3$

$$\therefore a=1$$

따라서 $g(x)=x+4$ 이므로

$$g(-2)=-2+4=2$$

답 2

0826 조건 (가), (나)에서

$$(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=1$$

조건 (가), (다)에서

$$(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=2$$

... 1단계

이때 조건 (가)에서 $f(2)=3, g(2)=3$ 이고 두 함수 f, g 는 일대일대응이므로

$$f(1)=1, g(1)=2$$

... 2단계

$$\therefore f(1)+g(1)=3$$

... 3단계

답 3

	채점 요소	비율
1단계	$g(3), f(3)$ 의 값 구하기	60 %
2단계	$f(1), g(1)$ 의 값 구하기	30 %
3단계	$f(1)+g(1)$ 의 값 구하기	10 %

0827 $f(x)=2x+6, g(x)=ax-3$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(ax-3)$$

$$=2(ax-3)+6$$

$$=2ax$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+6)$$

$$=a(2x+6)-3$$

$$=2ax+6a-3$$

$$f \circ g=g \circ f \text{이므로} \quad 2ax=2ax+6a-3$$

$$0=6a-3 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}x-3$ 이므로

$$g(4)=\frac{1}{2} \times 4-3=-1$$

답 -1

0828 주어진 그림에서

$$f(1)=3, f(2)=4, f(3)=5, f(4)=1, f(5)=2$$

$$f \circ g=g \circ f \text{에서} \quad f(g(x))=g(f(x)) \quad \dots\dots ①$$

㉗의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(g(1))=g(f(1)), \quad f(4)=g(3) \\ \therefore g(3)=1$$

㉘의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$f(g(3))=g(f(3)), \quad f(1)=g(5) \\ \therefore g(5)=3$$

㉙의 양변에 $x=5$ 를 대입하면

$$f(g(5))=g(f(5)), \quad f(3)=g(2) \\ \therefore g(2)=5$$

답 ⑤

참고 ㉚의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(g(2))=g(f(2)), \quad f(5)=g(4) \\ \therefore g(4)=2$$

0829 $f(x)=2x-3$, $g(x)=ax+b$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b) \\ =2(ax+b)-3 \\ =2ax+2b-3 \\ (g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3) \\ =a(2x-3)+b \\ =2ax-3a+b$$

$$f \circ g = g \circ f \text{이므로} \quad 2ax+2b-3=2ax-3a+b$$

$$2b-3=-3a+b \quad \therefore b=-3a+3$$

$$\therefore g(x)=ax-3a+3$$

$$=a(x-3)+3$$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 3)$ 을 지난다. 답 (3, 3)

0830 $f(x)=ax+6$, $g(x)=bx-6$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(bx-6) \\ =a(bx-6)+6 \\ =abx-6a+6 \\ (g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+6) \\ =b(ax+6)-6 \\ =abx+6b-6$$

$$f \circ g = g \circ f \text{이므로} \quad abx-6a+6=abx+6b-6$$

$$-6a+6=6b-6, \quad 6a+6b=12$$

$$\therefore a+b=2$$

이때 a, b 는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad 2 \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore \sqrt{ab} \leq 1 \quad (\text{단, 등호는 } a=1, b=1 \text{일 때 성립})$$

양변을 제곱하면 $ab \leq 1$

따라서 ab 의 최댓값은 1이다. 답 1

0831 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$$=a(ax+b)+b \\ =a^2x+ab+b$$

$$(f \circ f)(x)=4x+3 \text{이므로} \quad a^2x+ab+b=4x+3$$

$$\therefore a^2=4, \quad ab+b=3$$

$$a^2=4 \text{에서} \quad a=2 \quad (\because a>0)$$

$$ab+b=3 \text{에 } a=2 \text{를 대입하면}$$

$$2b+b=3 \quad \therefore b=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=2x+1 \text{이므로}$$

$$f(3)=2 \times 3 + 1 = 7$$

답 ①

0832 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+a)$

$$=(x^2+a)^2+a$$

$$=x^4+2ax^2+a^2+a$$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$(f \circ f)(1)=5, \quad 1+2a+a^2+a=5$$

$$a^2+3a-4=0, \quad (a+4)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

답 ①

0833 $g(x)=(f \circ f)(x)=f(f(x))$

$$=f(-3x+k)$$

$$=-3(-3x+k)+k$$

$$=9x-2k$$

함수 $g(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값도 증가하므로 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때 $x=-1$ 에서 최솟값, $x=1$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$\text{이때 최댓값이 3이므로} \quad g(1)=3$$

$$9-2k=3 \quad \therefore k=3$$

$$\text{따라서 } g(x)=9x-6 \text{이므로 구하는 최솟값은}$$

$$g(-1)=-9-6=-15$$

답 ③

0834 $(f \circ h)(x)=g(x)$ 이므로 $f(h(x))=g(x)$

$$-2h(x)+1=4x^2+3, \quad -2h(x)=4x^2+2$$

$$\therefore h(x)=-2x^2-1$$

답 ②

0835 $(h \circ g \circ f)(x)=((h \circ g) \circ f)(x)$

$$=(h \circ g)(f(x))$$

$$=3f(x)-2$$

... 1단계

$$\text{즉 } 3f(x)-2=6x-5 \text{이므로}$$

$$3f(x)=6x-3 \quad \therefore f(x)=2x-1$$

... 2단계

$$\therefore f(5)=2 \times 5 - 1 = 9$$

... 3단계

답 9

채점 요소		비율
1단계	$(h \circ g \circ f)(x)$ 를 $f(x)$ 에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계	$f(x)$ 구하기	40 %
3단계	$f(5)$ 의 값 구하기	20 %

다른 풀이 $(h \circ g \circ f)(5)=(h \circ g)(f(5))$ 에서

$$6 \times 5 - 5 = 3f(5) - 2 \quad \therefore f(5) = 9$$

0836 $(f \circ g)(x) = 6x + 7$ 이므로 $f(g(x)) = 6x + 7$

$$\therefore f\left(\frac{3x+1}{4}\right) = 6x + 7$$

$$\frac{3x+1}{4} = t \text{로 놓으면}$$

$$3x+1=4t \quad \therefore x = \frac{4t-1}{3}$$

따라서 $f(t) = 6 \times \frac{4t-1}{3} + 7 = 8t + 5$ 이므로

$$f(-1) = 8 \times (-1) + 5 = -3$$

답 -3

다른 풀이 $(f \circ g)(x) = 6x + 7$ 에서

$$f\left(\frac{3x+1}{4}\right) = 6x + 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{3x+1}{4} = -1 \text{에서} \quad 3x+1 = -4 \quad \therefore x = -\frac{5}{3}$$

①에 $x = -\frac{5}{3}$ 를 대입하면

$$f(-1) = 6 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 7 = -3$$

0837 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-2)$
 $= 2(x-2) - 1 = 2x - 5$

이므로

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ f)(x) &= (h \circ (g \circ f))(x) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(2x-5) \end{aligned}$$

이때 $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 이므로

$$h(2x-5) = x-2$$

$$2x-5=t \text{로 놓으면} \quad 2x=t+5 \quad \therefore x = \frac{t+5}{2}$$

따라서 $h(t) = \frac{t+5}{2} - 2 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ 이므로

$$h(3) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

답 2

0838 $f^1(x) = f(x) = -x + 3$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f^1)(x) = f(f^1(x)) = f(-x+3) \\ &= -(-x+3) + 3 = x \end{aligned}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x) = -x + 3$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(-x+3) = x$$

$\vdots$

$$\text{즉 } f^n(x) = \begin{cases} -x+3 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f^{99}(x) = -x + 3$$

$$\therefore f^{99}(1) = -1 + 3 = 2$$

답 2

다른 풀이 $f^1(1) = f(1) = 2$ 이므로

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f^1(1)) = f(2) = 1$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(1) = 2$$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$ 의 값은 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $99 = 2 \times 49 + 1$ 이므로

$$f^{99}(1) = f^1(1) = 2$$

094 정답 및 풀이

0839 $f^1(x) = f(x) = x - 1$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f^1)(x) = f(f^1(x)) = f(x-1) \\ &= (x-1) - 1 = x-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x-2) \\ &= (x-2) - 1 = x-3 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x) = x - n$$

따라서 $f^{10}(x) = x - 10$ 이므로 $f^{10}(a) = 5$ 에서

$$a - 10 = 5 \quad \therefore a = 15$$

답 15

0840 $f^1(2) = f(2) = 3$ 이므로

$$f^2(2) = f(f^1(2)) = f(3) = 4$$

$$f^3(2) = f(f^2(2)) = f(4) = 1$$

$$f^4(2) = f(f^3(2)) = f(1) = 2$$

$$f^5(2) = f(f^4(2)) = f(2) = 3$$

$\vdots$

즉 $f^n(2)$ 의 값은 3, 4, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $50 = 4 \times 12 + 2$ 이므로

$$f^{50}(2) = f^2(2) = 4$$

답 4

0841 주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ -2x + 4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 $f^1\left(\frac{8}{7}\right) = f\left(\frac{8}{7}\right) = -2 \times \frac{8}{7} + 4 = \frac{12}{7}$ 이므로

$$\begin{aligned} f^2\left(\frac{8}{7}\right) &= (f \circ f^1)\left(\frac{8}{7}\right) = f\left(f^1\left(\frac{8}{7}\right)\right) = f\left(\frac{12}{7}\right) \\ &= -2 \times \frac{12}{7} + 4 = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3\left(\frac{8}{7}\right) &= (f \circ f^2)\left(\frac{8}{7}\right) = f\left(f^2\left(\frac{8}{7}\right)\right) = f\left(\frac{4}{7}\right) \\ &= 2 \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

$$f^4\left(\frac{8}{7}\right) = (f \circ f^3)\left(\frac{8}{7}\right) = f\left(f^3\left(\frac{8}{7}\right)\right) = f\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{12}{7}$$

$\vdots$

즉 $f^n\left(\frac{8}{7}\right)$ 의 값은 $\frac{12}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}$ 이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2024 = 3 \times 674 + 2$ 이므로

$$f^{2024}\left(\frac{8}{7}\right) = f^2\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{4}{7}$$

답 $\frac{4}{7}$

0842 $f(1) = 7$ 이므로

$$a + b = 7$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$f^{-1}(10) = 4$ 에서 $f(4) = 10$ 이므로

$$4a + b = 10$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 6$

$$\therefore ab = 6$$

답 6

0843 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(0)=0 \text{에서 } c=0$$

$$\therefore f(x)=ax^2+bx$$

$$f^{-1}(3)=1 \text{에서 } f(1)=3 \text{이므로}$$

$$a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(8)=4 \text{에서 } f(4)=8 \text{이므로}$$

$$16a+4b=8 \quad \therefore 4a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a=-\frac{1}{3}, b=\frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x \text{이므로}$$

$$f(-6)=-\frac{1}{3} \times (-6)^2 + \frac{10}{3} \times (-6) = -32$$

답 ④

0844 $\frac{3x-1}{2}=t$ 로 놓으면 $3x-1=2t$

$$\therefore x=\frac{2t+1}{3}$$

$$\text{따라서 } f(t)=-6 \times \frac{2t+1}{3} + 1 = -4t-1 \text{이므로}$$

$$f(x)=-4x-1$$

$$f^{-1}(7)=k \text{라 하면 } f(k)=7 \text{이므로}$$

$$-4k-1=7 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore f^{-1}(7)=-2$$

답 -2

다른 풀이 $-6x+1=7$ 에서 $x=-1$

$$x=-1 \text{을 } f\left(\frac{3x-1}{2}\right)=-6x+1 \text{에 대입하면}$$

$$f(-2)=7 \quad \therefore f^{-1}(7)=-2$$

0845 $x \geq 1$ 일 때, $f(x)=x-2 \geq -1$

$$x < 1$$
일 때, $f(x)=3x-4 < -1$

$$f^{-1}(-7)=m \text{이라 하면 } f(m)=-7 \text{이므로}$$

$$3m-4=-7 \quad \leftarrow -7 < -1 \text{이므로 } f(x)=3x-4 \text{에 대입}$$

$$\therefore m=-1$$

$$f^{-1}(4)=n \text{이라 하면 } f(n)=4 \text{이므로}$$

$$n-2=4 \quad \leftarrow 4 > -1 \text{이므로 } f(x)=x-2 \text{에 대입}$$

$$\therefore n=6$$

$$\therefore f^{-1}(-7)+f^{-1}(4)=-1+6=5$$

답 5

0846 함수 $f(x)=-3x+2$ 의 역함수가 존재하면 함수 f 는 일대일대응이므로 치역과 공역이 같다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프의 기울기가 음수이므로

$$f(-1)=b, f(1)=a$$

$$f(-1)=3+2=5, f(1)=-3+2=-1 \text{이므로}$$

$$a=-1, b=5$$

$$\therefore a+b=4$$

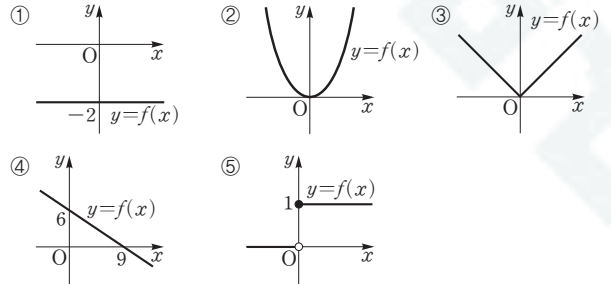
답 4

0847 함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 는 일대일대응이어야 한다.

따라서 역함수가 존재하는 함수는 ④이다.

답 ④

참고 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



0848 $f(x)=-x^2+8x+a=-(x-4)^2+a+16$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 는 일대일대응이어야 한다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=4$ 이므로 $x \leq 3$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 일대일함수이고 치역과 공역이 같아야 하므로

$$f(3)=3, \quad a+15=3$$

$$\therefore a=-12$$

답 -12

0849 $f(x)=2x-3+a|x-2|$ 에서

(i) $x \geq 2$ 일 때, $x-2 \geq 0$ 이므로

$$f(x)=2x-3+a(x-2)=(2+a)x-2a-3$$

(ii) $x < 2$ 일 때, $x-2 < 0$ 이므로

$$f(x)=2x-3-a(x-2)=(2-a)x+2a-3$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 $x \geq 2$ 일 때와 $x < 2$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉 $(2+a)(2-a) > 0$ 이므로

$$(a+2)(a-2) < 0 \quad \therefore -2 < a < 2$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 1이다.

답 1

0850 $y=\frac{1}{3}x+a$ 라 하면

$$\frac{1}{3}x=y-a \quad \therefore x=3y-3a$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=3x-3a$$

$$\therefore f^{-1}(x)=3x-3a$$

$$\text{따라서 } 3x-3a=bx-6 \text{이므로}$$

$$3=b, -3a=-6 \quad \therefore a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

답 ③

0851 $y=5x-1$ 이라 하면 $x \geq 1$ 일 때 $y \geq 4$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 집합 $\{x|x \geq 1\}$ 에서 집합 $\{y|y \geq 4\}$ 로의 일대일대응이다.

따라서 $f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq 4\}$ 이다.

이때 $y=5x-1$ 에서

$$5x=y+1 \quad \therefore x=\frac{1}{5}y+\frac{1}{5}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \quad (x \geq 4)$$

따라서 $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}, c = 4$ 이므로

$$abc = \frac{4}{25}$$

답 $\frac{4}{25}$

0852 $3x-1=t$ 로 놓으면 $x = \frac{t+1}{3}$

따라서 $f(t) = 6 \times \frac{t+1}{3} + 1 = 2t+3$ 이므로

$$f(x) = 2x+3$$

$y = 2x+3$ 이라 하면 $2x = y-3$

$$\therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ 이므로

$$a-b=2$$

... 1단계

... 2단계

... 3단계

답 2

채점 요소		비율
1단계	함수 $f(x)$ 구하기	40 %
2단계	역함수 $f^{-1}(x)$ 구하기	40 %
3단계	$a-b$ 의 값 구하기	20 %

0853 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이다.

따라서 $f(x)$ 의 역함수가 존재한다.

(i) $x \geq 1$ 일 때

$y = -2x+5$ 라 하면 $y \leq 3$ 이고

$$2x = -y+5 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad (x \leq 3)$

(ii) $x < 1$ 일 때

$y = -3x+6$ 이라 하면 $y > 3$ 이고

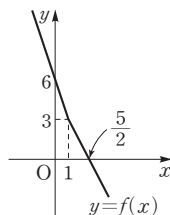
$$3x = -y+6 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}y + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad (x > 3)$

(i), (ii)에서

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & (x \leq 3) \\ -\frac{1}{3}x + 2 & (x > 3) \end{cases}$$

답 $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & (x \leq 3) \\ -\frac{1}{3}x + 2 & (x > 3) \end{cases}$



0854 $y=ax+4$ 라 하면 $ax=y-4$

$$\therefore x = \frac{1}{a}y - \frac{4}{a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{a}x - \frac{4}{a}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{4}{a}$$

$f=f^{-1}$ 이므로 $a = \frac{1}{a}, 4 = -\frac{4}{a} \quad \therefore a = -1$

따라서 $f(x) = -x+4$ 이므로

$$f(a) = f(-1) = -(-1)+4=5$$

답 5

다른 풀이 $f=f^{-1}$ 이면 $(f \circ f)(x) = x$

$$\therefore f(f(x)) = x$$

..... ㉠

이때 $f(x) = ax+4$ 에서

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(ax+4) = a(ax+4)+4 \\ &= a^2x+4a+4 \end{aligned}$$

㉠에서 $a^2x+4a+4=x$ 이므로

$$a^2=1, 4a+4=0 \quad \therefore a=-1$$

0855 $(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f=f^{-1}$ 이므로

$$f^{-1}(2) = f(2) = -1$$

또 $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = 2$ 에서 $f(-1) = 2$ 이므로

$$f^{-1}(2) + f(-1) = -1 + 2 = 1$$

답 1

0856 $f=f^{-1}$ 이면 $(f \circ f)(x) = x$

$$\therefore f(f(x)) = x$$

ㄱ. $f(x) = -x$ 에서

$$f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$$

ㄴ. $f(x) = 5x$ 에서

$$f(f(x)) = f(5x) = 5 \times 5x = 25x$$

ㄷ. $f(x) = -x+4$ 에서

$$f(f(x)) = f(-x+4) = -(-x+4)+4 = x$$

ㄹ. $f(x) = x-2$ 에서

$$f(f(x)) = f(x-2) = (x-2)-2 = x-4$$

이상에서 $f=f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

다른 풀이 ㄱ. $y = -x$ 라 하면 $x = -y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -x$

즉 $f^{-1}(x) = -x$ 이므로 $f = f^{-1}$

ㄴ. $y = 5x$ 라 하면 $x = \frac{1}{5}y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{5}x$

즉 $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$ 이므로 $f \neq f^{-1}$

ㄷ. $y = -x+4$ 라 하면 $x = -y+4$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -x+4$

즉 $f^{-1}(x) = -x+4$ 이므로 $f = f^{-1}$

ㄹ. $y = x-2$ 라 하면 $x = y+2$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = x+2$

즉 $f^{-1}(x) = x+2$ 이므로 $f \neq f^{-1}$

0857 $f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(3)=2 \text{에서} \quad 3a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f=f^{-1} \text{이므로} \quad f^{-1}(3)=f(3)=2$$

$$\text{즉 } f(2)=3 \text{이므로} \quad 2a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면} \quad a=-1, b=5$$

$$\therefore f(x)=-x+5$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프의 x 절편은 5, y 절편은 5이므로

$$m=5, n=5$$

$$\therefore m+n=10 \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 $\textcircled{㉠}$ 에서 $b=2-3a$

$$\therefore f(x)=ax+2-3a \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\text{한편 } f=f^{-1} \text{이면} \quad (f \circ f)(x)=x$$

$$\therefore f(f(x))=x \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$f(f(x))=f(ax+2-3a)$$

$$=a(ax+2-3a)+2-3a$$

$$=a^2x-3a^2-a+2$$

$$\text{이므로 } \textcircled{㉣} \text{에서} \quad a^2x-3a^2-a+2=x$$

$$\therefore a^2=1, -3a^2-a+2=0$$

$$(i) a^2=1 \text{에서} \quad a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

$$(ii) -3a^2-a+2=0 \text{에서}$$

$$3a^2+a-2=0, \quad (a+1)(3a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=\frac{2}{3}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a=-1 \text{이므로 } \textcircled{㉢} \text{에서}$$

$$f(x)=-x+5$$

0858 $(f^{-1} \circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=2$ 에서

$$f(2)=g(a)$$

$$2 \times 2 - 3 = 3a - 5 \quad \therefore a=2 \quad \text{답 2}$$

0859 $g(8)=6$ 이므로 $g^{-1}(6)=8$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(6)=f(g^{-1}(6))=f(8)=2$$

$$f(4)=6 \text{이므로} \quad f^{-1}(6)=4$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f^{-1})(6)=g^{-1}(f^{-1}(6))=g^{-1}(4)$$

$$\text{이때 } g(2)=4 \text{이므로} \quad g^{-1}(4)=2$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f^{-1})(6)=g^{-1}(4)=2$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(6) + (g^{-1} \circ f^{-1})(6) = 2 + 2 = 4 \quad \text{답 4}$$

0860 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x-a)$

$$=3(x-a)-2a=3x-5a$$

$$\text{즉 } 3x-5a=3x+10 \text{이므로}$$

$$-5a=10 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore f(x)=x+2, g(x)=3x+4$$

$$g^{-1}(-2)=k \text{라 하면 } g(k)=-2 \text{이므로}$$

$$3k+4=-2 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(-2)=f(g^{-1}(-2))=f(-2)$$

$$=-2+2=0 \quad \text{답 ②}$$

0861 $x \geq 0$ 일 때 $g(x)=x+1 \geq 1$

$$x < 0 \text{일 때} \quad g(x)=-x^2+1 < 1$$

$$g^{-1}(2)=a \text{라 하면 } g(a)=2 \text{이므로}$$

$$a+1=2 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))=f(1)=3 \times 1 - 1 = 2$$

$$g(-1)=-(-1)^2+1=0 \text{이므로}$$

$$(f^{-1} \circ g)(-1)=f^{-1}(g(-1))=f^{-1}(0)$$

$$f^{-1}(0)=b \text{라 하면 } f(b)=0 \text{이므로}$$

$$3b-1=0 \quad \therefore b=\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } (f^{-1} \circ g)(-1)=f^{-1}(0)=\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$(f \circ g^{-1})(2) + (f^{-1} \circ g)(-1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{답 } \frac{7}{3}$$

0862 $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(3) = (f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(3)$

$$= (f \circ g^{-1})(3)$$

$$= f(g^{-1}(3))$$

$$g^{-1}(3)=k \text{라 하면 } g(k)=3 \text{이므로}$$

$$3k-6=3 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore (f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(3) = f(g^{-1}(3))$$

$$= f(3)$$

$$= 3 + 1 = 4 \quad \text{답 4}$$

0863 $(f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1})(-1)$

$$= (f \circ g^{-1} \circ f)(-1)$$

$$= f(g^{-1}(f(-1)))$$

$$= f(g^{-1}(-1)) \quad \leftarrow f(-1) = -(-1)^2 = -1$$

$$g^{-1}(-1)=k \text{라 하면 } g(k)=-1 \text{이므로}$$

$$-3k+2=-1 \quad \therefore k=1$$

$$\therefore (f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1})(-1) = f(g^{-1}(-1))$$

$$= f(1)$$

$$= 2 \times 1 = 2 \quad \text{답 ③}$$

0864 $(f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f \circ g^{-1} \circ f)(x)$

$$= (g^{-1} \circ f)(x)$$

$$= g^{-1}(f(x))$$

$$\text{즉 } g^{-1}(f(x))=ax+b \text{이므로} \quad g(ax+b)=f(x)$$

$$3(ax+b)+1=-x+2$$

$$\therefore 3ax+3b+1=-x+2$$

$$\text{따라서 } 3a=-1, 3b+1=2 \text{이므로} \quad a=-\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a-2b=-1 \quad \text{답 -1}$$

다른 풀이 $y=3x+1$ 이라 하면 $3x=y-1$

$$\therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

$$\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore (f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1} \circ f)(x) \\
 &= (g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) \\
 &= g^{-1}(-x+2) \\
 &= \frac{1}{3}(-x+2) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

0865 $(g^{-1} \circ f^{-1})(-6) = -4$ 에서

$(f \circ g)^{-1}(-6) = -4$ 이므로

$$(f \circ g)(-4) = -6 \quad \therefore f(g(-4)) = -6$$

$$g(-4) = -4 + 6 = 2 \text{이므로} \quad f(2) = -6$$

$$\therefore 2a + b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편 $g^{-1}(7) = k$ 라 하면 $g(k) = 7$ 이므로

$$k + 6 = 7 \quad \therefore k = 1$$

따라서 $(f \circ g^{-1})(7) = f(g^{-1}(7)) = f(1) = -2$ 이므로

$$a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = -4, b = 2$

$$\therefore ab = -8 \quad \text{답 -8}$$

0866 $(f \circ g^{-1} \circ f^{-1})(c)$

$$= f(g^{-1}(f^{-1}(c)))$$

$f^{-1}(c) = k$ 라 하면 $f(k) = c$ 이

므로 $k = e$

$$\therefore (f \circ g^{-1} \circ f^{-1})(c)$$

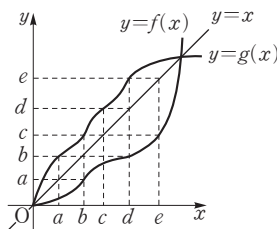
$$= f(g^{-1}(f^{-1}(c)))$$

$$= f(g^{-1}(e))$$

$g^{-1}(e) = l$ 이라 하면 $g(l) = e$ 이므로

$$l = d$$

$$\therefore (f \circ g^{-1} \circ f^{-1})(c) = f(g^{-1}(e)) = f(d) = b \quad \text{답 ②}$$



0867 $(f \circ f \circ f)(a)$

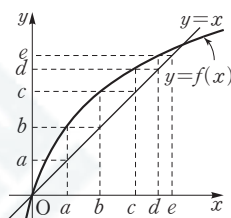
$$= f(f(f(a)))$$

$$= f(f(b))$$

$$= f(c)$$

$$= d$$

답 ④



0868 $(f \circ f)^{-1}(b)$

$$= (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$$

$$= f^{-1}(f^{-1}(b))$$

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$ 이므로

$$k = c$$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$$

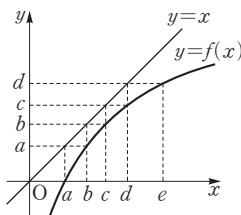
$$= f^{-1}(c)$$

$f^{-1}(c) = l$ 이라 하면 $f(l) = c$ 이므로

$$l = d$$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = f^{-1}(c) = d$$

답 ④



0869 $f(x+y) = f(x) + f(y)$

..... ⑦

⑦의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

⑦의 양변에 $x=2, y=-2$ 를 대입하면

$$f(0) = f(2) + f(-2), \quad 0 = 6 + f(-2)$$

$$\therefore f(-2) = -6$$

답 -6

0870 $f(xy) = f(x) + f(y)$

..... ⑦

⑦의 양변에 $x=2, y=2$ 를 대입하면

$$f(4) = f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2$$

⑦의 양변에 $x=4, y=4$ 를 대입하면

$$f(16) = f(4) + f(4) = 2 + 2 = 4$$

답 4

0871 $f(x+y) = f(x)f(y)$

..... ⑦

ㄱ. ⑦의 양변에 $x=1, y=0$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1)f(0), \quad 2 = 2f(0)$$

$$\therefore f(0) = 1 \text{ (참)}$$

ㄴ. ⑦의 양변에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(2) = f(1)f(1) = 2 \times 2 = 4$$

⑦의 양변에 $x=2, y=-2$ 를 대입하면

$$f(0) = f(2)f(-2), \quad 1 = 4f(-2)$$

$$\therefore f(-2) = \frac{1}{4} \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $f(2x) = f(x+x) = f(x)f(x) = \{f(x)\}^2$

$$f(3x) = f(x+2x) = f(x)f(2x) = f(x)\{f(x)\}^2$$

$$= \{f(x)\}^3$$

$$f(4x) = f(x+3x) = f(x)f(3x) = f(x)\{f(x)\}^3$$

$$= \{f(x)\}^4$$

$$\vdots$$

$$\therefore f(nx) = \{f(x)\}^n \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0872 $f(1) < f(2) < f(3)$ 에서 $3 < f(2) < f(3)$

이를 만족시키려면 공역의 원소 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 $f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$f(4) > f(5) > f(6)$ 에서 $5 > f(5) > f(6)$

이를 만족시키려면 공역의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 5, 6에 대응시키면 된다.

즉 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$10 \times 6 = 60$$

답 60

0873 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{2, 3, 5, 7, 11\}$ 이고, 조건 (나)에서 $f(x)$ 의 값이 될 수 있는 것은 3, 5, 7, 11이다.
따라서 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 f 는 집합 $\{-1, 0, 1\}$ 에서 집합 $\{3, 5, 7, 11\}$ 로의 일대일함수이므로 구하는 함수 f 의 개수는

$${}_4P_3=4 \times 3 \times 2=24$$

답 24

0874 조건 (가)에서 $f(1) \geq 5$ 이므로
 $f(1)=5$ 또는 $f(1)=6$ 또는 $f(1)=7$

(i) $f(1)=5$ 일 때

조건 (나)에서 $5 > f(2) > f(3) > f(4)$

이를 만족시키려면 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f 의 개수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

(ii) $f(1)=6$ 일 때

조건 (나)에서 $6 > f(2) > f(3) > f(4)$

이를 만족시키려면 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f 의 개수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5 \times 4}{2 \times 1}=10$$

(iii) $f(1)=7$ 일 때

조건 (나)에서 $7 > f(2) > f(3) > f(4)$

이를 만족시키려면 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f 의 개수는

$${}_6C_3=\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}=20$$

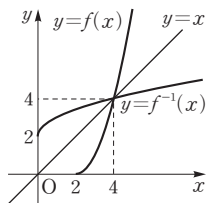
이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$4+10+20=34$$

답 34

0875 $f(x)=x^2-4x+4$
 $= (x-2)^2 \ (x \geq 2)$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



$x^2-4x+4=x$ 에서

$$x^2-5x+4=0, \quad (x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=4 \ (\because x \geq 2)$$

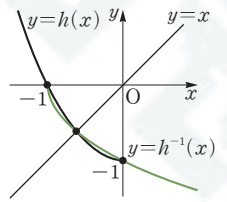
따라서 교점의 좌표는 (4, 4)이므로 $a=4, b=4$

$$\therefore ab=16$$

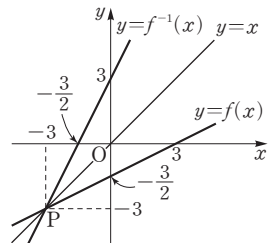
답 3

RPM 비법 노트

함수 $g(x)=-x$ 와 같이 역함수가 자기 자신이 되는 경우나 오른쪽 그림의 함수 $h(x)=x^2-1 \ (x \leq 0)$ 과 같은 경우에는 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 직선 $y=x$ 밖에서도 만난다. 따라서 직선 $y=x$ 를 이용하여 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 구하는 경우에는 반드시 그래프를 그려 직선 $y=x$ 밖에 존재하는 교점이 없는지 확인해야 한다.



0876 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = x \text{에서} \quad -\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = -3$$

... 1단계

따라서 교점 P의 좌표는 $(-3, -3)$ 이므로

$$OP = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

... 2단계

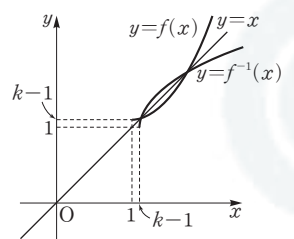
답 3√2

	채점 요소	비율
1단계	점 P의 x좌표 구하기	70 %
2단계	선분 OP의 길이 구하기	30 %

참고 $f^{-1}(x)$ 를 직접 구하고 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$ 의 해를 구하여 점 P의 x좌표를 구할 수도 있다.

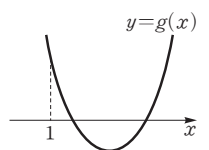
0877 $f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1 \ (x \geq 1)$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 이차방정식 $x^2-2x+k=x$, 즉 $x^2-3x+k=0$ 의 서로 다른 두 실근이 모두 1보다 크거나 같아야 한다.

$g(x)=x^2-3x+k$ 라 하면 $y=g(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) 이차방정식 $g(x)=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times k > 0$$

$$\therefore k < \frac{9}{4}$$

시험에 꼭 나오는 문제

(ii) $g(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$1-3+k \geq 0 \quad \therefore k \geq 2$$

(iii) $y=g(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$x = \frac{3}{2} > 1$$

이상에서 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$2 \leq k < \frac{9}{4}$$

답 $2 \leq k < \frac{9}{4}$

momo2000@hanmail.net

0878 $y=|x-2|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값이 2이므로

(i) $x < 2$ 일 때, $y=-(x-2)=-x+2$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y=x-2$

(i), (ii)에서 $y=|x-2|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

한편 직선

$$y=mx-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

은 m 의 값에 관계없이 점

$(0, -1)$ 을 지난다.

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y=-x+2$ 와 평행할 때

$$m=-1$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0=2m-1 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$m < -1 \text{ 또는 } m \geq \frac{1}{2}$$

답 $m < -1 \text{ 또는 } m \geq \frac{1}{2}$

0879 $y=f(|x|)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x \geq 0$ 인 부분만 남기고, $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 그 개형은 $\textcircled{2}$ 이다.

답 $\textcircled{2}$

0880 $y=|x-2|-|x+4|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x 의 값이 $-4, 2$ 이므로

(i) $x < -4$ 일 때

$$y=-(x-2)+(x+4)=6$$

(ii) $-4 \leq x < 2$ 일 때

$$y=-(x-2)-(x+4)=-2x-2$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y=(x-2)-(x+4)=-6$$

이상에서 $y=|x-2|-|x+4|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$M=6, m=-6$$

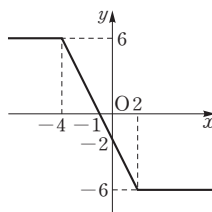
$$\therefore M-m=12$$

답 12

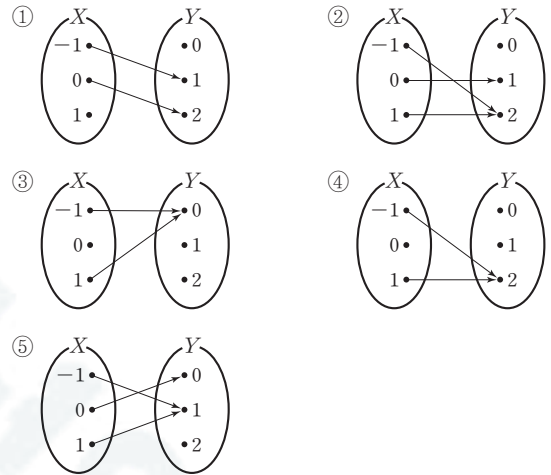
참고 $y=|x-p|+|x-q|$ 의 그래프는

$$x < p, p \leq x < q, x \geq q \quad (p < q)$$

일 때로 나누어 그린다.



0881 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\textcircled{1}$ X 의 원소 1에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ X 의 원소 0에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 $\textcircled{2}, \textcircled{5}$ 이다.

답 $\textcircled{2}, \textcircled{5}$

0882 $2n-1=9$ 에서 $n=5$

조건 $\textcircled{4}$ 에 $n=5$ 를 대입하면

$$f(9)=5+1=6$$

한편 조건 $\textcircled{7}$ 에 $n=12$ 를 대입하면

$$f(24)=f(13)$$

조건 $\textcircled{4}$ 에 $n=7$ 를 대입하면

$$f(13)=7+1=8 \quad \therefore f(24)=f(13)=8$$

$$\therefore f(9)+f(24)=6+8=14$$

답 14

0883 $8^1=8, 8^2=64, 8^3=512, 8^4=4096, 8^5=32768, \dots$

이므로 8^x 의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복된다.

따라서 함수 f 의 치역은 $\{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은

$$2+4+6+8=20$$

답 20

0884 $f(0)=g(0)$ 에서 $3=a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$f(1)=g(1)$ 에서 $1-2+3=b \quad \therefore b=2$

$\textcircled{1}$ 에 $b=2$ 를 대입하면 $3=a+2 \quad \therefore a=1$

$$\therefore 2a+b=4$$

답 4

참고 $g(x)=|x-1|+20$ 이므로 $f(2)=g(2)=3$

0885 $f(1)+f(2)=8$ 이고 f 는 일대일함수이므로

$$f(1)=3, f(2)=5 \text{ 또는 } f(1)=5, f(2)=3$$

이때 $f(3), f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 4 중 서로 다른 두 수이다.

따라서 $f(3)=2, f(4)=4$ 또는 $f(3)=4, f(4)=2$ 일 때
 $f(3)+f(4)$ 의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은
 $2+4=6$

답 6

0886 함수 f 가 일대일대응이므로
 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같
 아야 한다.
 이때 $g(x)=ax^2+b$ 라 하면 $y=g(x)$ 의
 그래프가 두 점 $(0, 4), (3, 1)$ 을 지나
 야 하므로

$$g(0)=4, g(3)=1$$

$$b=4, 9a+b=1$$

$$\therefore a=-\frac{1}{3}, b=4$$

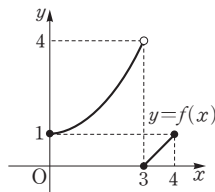
$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^2+4 & (0 \leq x < 3) \\ x-3 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(1)=-\frac{1}{3}+4=\frac{11}{3}$$

답 5

RPM 비법 노트

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림
 과 같으면 공역의 원소 4가 치역에 속
 하지 않으므로 함수 f 는 일대일대응이
 아니다.



0887 조건 ㉠에서 함수 f 는 항등함수이므로

$$f(1)=1$$

또 함수 g 는 상수함수이므로 $g(x)=k(k \in X)$ 라 하면

$$g(1)=g(3)=k$$

조건 ㉡에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$ 이므로

$$1+k+h(1)=7 \quad \therefore h(1)=6-k$$

$$\therefore g(3)+h(1)=k+(6-k)=6$$

답 5

다른 풀이 조건 ㉠에서 함수 f 는 항등함수이고 조건 ㉡에서

$$f(1)+g(1)+h(1)=7 \text{이므로}$$

$$1+g(1)+h(1)=7 \quad \therefore g(1)+h(1)=6$$

이때 조건 ㉠에서 함수 g 는 상수함수이므로

$$g(3)=g(1)$$

$$\therefore g(3)+h(1)=g(1)+h(1)=6$$

0888 주어진 조건을 만족시키는 함수 f 는 일대일함수이다.

따라서 집합 $X=\{a, b, c, d\}$ 에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 으로의 일대일함수의 개수는

$${}_6P_4=6 \times 5 \times 4 \times 3=360$$

답 360

0889 $\sqrt{100}$, 즉 10보다 작은 자연수는 1, 2, ..., 9의 9개이므
 로 $g(100)=9$

$$\therefore (f \circ f \circ g)(100)=f(f(g(100)))=f(f(9))$$

9보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 $f(9)=4$

$$\therefore (f \circ f \circ g)(100)=f(f(9))=f(4)$$

4보다 작은 소수는 2, 3의 2개이므로 $f(4)=2$

$$\therefore (f \circ f \circ g)(100)=f(4)=2$$

답 ①

0890 $f(1)=2, f(3)=1$ 이고 함수 f 가 일대일대응이므로

$$f(2)=3$$

$$\therefore (g \circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=3$$

또 $(f \circ g)(1)=f(g(1))=2$ 이고 $f(1)=2$ 이므로

$$g(1)=1$$

이때 함수 g 가 일대일대응이므로 $g(2)=2$

$$\begin{aligned} \therefore g(2)+(g \circ f)(3) &= 2+g(f(3))=2+g(1) \\ &= 2+1=3 \end{aligned}$$

답 3

0891 $f(1)=1$ 에서 $a-1=1 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x-1, g(x)=bx+c$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+c)$$

$$=2(bx+c)-1$$

$$=2bx+2c-1$$

이때 $(f \circ g)(x)=4x+5$ 이므로

$$2bx+2c-1=4x+5$$

$$2b=4, 2c-1=5 \quad \therefore b=2, c=3$$

$$\therefore abc=2 \times 2 \times 3=12$$

답 12

0892 $f(2)=4-4+a=a$ 이므로

$$(f \circ f)(2)=f(f(2))=f(a)$$

$$=a^2-2a+a$$

$$=a^2-a$$

$f(4)=16-8+a=a+8$ 이므로

$$(f \circ f)(4)=f(f(4))=f(a+8)$$

$$=(a+8)^2-2(a+8)+a$$

$$=a^2+15a+48$$

이때 $(f \circ f)(2)=(f \circ f)(4)$ 이므로

$$a^2-a=a^2+15a+48, \quad -16a=48$$

$$\therefore a=-3$$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$ 이므로

$$f(6)=36-12-3=21$$

답 ①

다른 풀이 $(f \circ f)(2)=f(f(2))=f(a)$

$$(f \circ f)(4)=f(f(4))=f(a+8)$$

$$(f \circ f)(2)=(f \circ f)(4) \text{이므로}$$

$$f(a)=f(a+8)$$

..... ①

이때 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$ 이므로 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$ 이다.

따라서 ㉠에서

$$\frac{a+(a+8)}{2}=1$$

$$2a+8=2 \quad \therefore a=-3$$

0893 $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$
 $= f((g \circ h)(x))$
 $= f(3x-5)$

이므로 $((f \circ g) \circ h)(x) = x^2$ 에서

$$f(3x-5) = x^2$$

$$3x-5=t \text{로 놓으면} \quad 3x=t+5 \quad \therefore x=\frac{t+5}{3}$$

따라서 $f(t) = \left(\frac{t+5}{3}\right)^2$ 이므로

$$f(4) = \left(\frac{4+5}{3}\right)^2 = 9$$

답 9

다른 풀이 $((f \circ g) \circ h)(x) = x^2$ 에서

$$f(3x-5) = x^2$$

$$3x-5=4 \text{에서} \quad x=3$$

㉠에 $x=3$ 을 대입하면 $f(4)=9$

0894 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ 이므로

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = (f \circ f^{-1})\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = (f \circ f^2)\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$f^4\left(\frac{1}{3}\right) = (f \circ f^3)\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^3\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} \frac{4}{3} & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{1}{3} & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^1\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right) = 15 \times \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 25$$

답 25

0895 $(g \circ f)(x) = x$ 이므로

$$g^{-1}(x) = f(x)$$

$f^{-1}(7) = k$ 라 하면 $f(k) = 7$ 이므로

$$4k-1=7 \quad \therefore k=2$$

또 $g^{-1}(7) = f(7) = 4 \times 7 - 1 = 27$ 이므로

$$f^{-1}(7) + g^{-1}(7) = 2 + 27 = 29$$

답 29

다른 풀이 $(g \circ f)(x) = x$ 에서 $g(f(x)) = x$

$$\therefore g(4x-1) = x$$

위의 식에 $x=7$ 을 대입하면

$$g(27) = 7 \quad \therefore g^{-1}(7) = 27$$

0896 $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$f^{-1}(1) = 3$ 에서 $f(3) = 1$ 이므로

$$3a + b = 1$$

..... ㉠

$(f \circ f)(3) = -1$ 에서 $f(f(3)) = -1$

$$f(1) = -1 \quad \therefore a + b = -1$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$

따라서 $f(x) = x - 2$ 이므로

$$f(4) = 4 - 2 = 2$$

답 2

0897 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하

므로 $f(x)$ 는 일대일대응이어야 한다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 $y=x^2-2x+a$ 의 그래프가 점

$(1, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = 1 - 2 + a \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & (x > 1) \\ x - 3 & (x \leq 1) \end{cases}$$

$f^{-1}(2) = k$ 라 하면 $f(k) = 2$

$x > 1$ 일 때 $f(x) > -2$, $x \leq 1$ 일 때 $f(x) \leq -2$ 이므로

$$k > 1$$

즉 $f(k) = k^2 - 2k - 1 = 2$ 이므로 $k^2 - 2k - 3 = 0$

$$(k+1)(k-3) = 0 \quad \therefore k = 3 (\because k > 1)$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 3$$

답 3

0898 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-4x+2)$

$$= 2(-4x+2) - 1 = -8x + 3$$

$y = -8x + 3$ 이라 하면 $8x = -y + 3$

$$\therefore x = -\frac{1}{8}y + \frac{3}{8}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

$$\therefore h^{-1}(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} \quad \text{답 } h^{-1}(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$$

0899 $(f \circ g)^{-1}(3x-1) = x$ 에서

$$(f \circ g)(x) = 3x-1$$

이때

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+c) = a(x+c) + b$$

$$= ax + ac + b$$

이므로 $ax + ac + b = 3x - 1$

$$\therefore a=3, ac+b=-1$$

또 $f^{-1}(3) = -1$ 에서 $f(-1) = 3$ 이므로

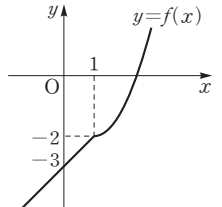
$$-a + b = 3$$

$a=3$ 이므로 $-3 + b = 3 \quad \therefore b=6$

$a=3, b=6$ 을 $ac+b=-1$ 에 대입하면

$$3c + 6 = -1 \quad \therefore c = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore f(x) = 3x + 6, g(x) = x - \frac{7}{3}$$



$$g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=k \text{라 하면 } g(k)=\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$k-\frac{7}{3}=\frac{2}{3} \quad \therefore k=3$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(3)=3 \times 3+6=15$$

답 ⑤

0900 $f^{-1}(3)=1$ 에서 $f(1)=3$ 이므로

$$1+k=3 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore f(x)=x|x|+2$$

$$(f \circ f)^{-1}(3)=(f^{-1} \circ f^{-1})(3) \\ =f^{-1}(f^{-1}(3))=f^{-1}(1)$$

에서 $f^{-1}(1)=a$ 라 하면 $f(a)=1$ 이므로

$$a|a|+2=1 \quad \therefore a|a|=-1$$

(i) $a \geq 0$ 일 때

$$|a|=a \text{이므로 } a^2=-1$$

이를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

$$|a|=-a \text{이므로 } -a^2=-1$$

$$a^2=1 \quad \therefore a=-1 \quad (\because a < 0)$$

(i), (ii)에서 $a=-1$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(3)=f^{-1}(1)=-1$$

답 ②

0901 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+1 & (x < 2) \\ 2x-4 & (x \geq 2) \end{cases}, g(x)=\begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g(-1)=0 \text{이므로}$$

$$(f \circ g)(-1)=f(g(-1))=f(0)=1$$

$$f(4)=2 \times 4-4=4 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(4)=g(f(4))=g(4)=4$$

$$\therefore (f \circ g)(-1)+(g \circ f)(4)=1+4=5$$

답 ②

0902 $(g \circ g \circ g)(e)$

$$=g(g(g(e)))$$

$$g(e)=k \text{라 하면 } f(k)=e \text{이므로}$$

$$k=d$$

$$\therefore (g \circ g \circ g)(e)$$

$$=g(g(g(e)))=g(g(d))$$

$$g(d)=l \text{이라 하면 } f(l)=d \text{이므로}$$

$$l=c$$

$$\therefore (g \circ g \circ g)(e)=g(g(d))=g(c)$$

$$g(c)=m \text{이라 하면 } f(m)=c \text{이므로}$$

$$m=b$$

$$\therefore (g \circ g \circ g)(e)=g(c)=b$$

답 ②

0903 $f(-2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

-2, 0, 2의 3개

$f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은

-2, 0, 2의 3개

$f(2)=f(-2)$ 이므로 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(-2)$ 의 1개

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$3 \times 3 \times 1=9$$

답 9

0904 $f(x)=|x+2|+|x-1|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x 의 값이 -2, 1이므로

(i) $x < -2$ 일 때

$$f(x)=-(x+2)-(x-1)=-2x-1$$

(ii) $-2 \leq x < 1$ 일 때

$$f(x)=(x+2)-(x-1)=3$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$f(x)=(x+2)+(x-1)=2x+1$$

이상에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$-2x-1=5 \text{에서 } x=-3$$

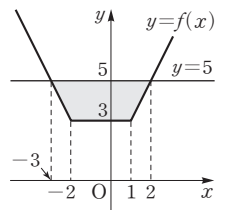
$$2x+1=5 \text{에서 } x=2$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=5$ 의 두 교점의 좌표는 (-3, 5), (2, 5)

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (5+3) \times 2=8$$

답 8



0905 함수 f 가 일대일대응이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 직선 $y=(a-2)x+b$ 의 기울기가 양수 이어야 하므로

$$a-2 > 0 \quad \therefore a > 2$$

..... ㉠ ... 1단계

또 직선 $y=(a-2)x+b$ 가 점 (1, 2)를 지나야 하므로

$$2=a-2+b \quad \therefore b=4-a$$

... 2단계

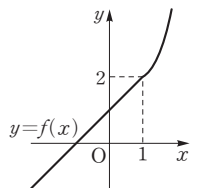
이때 ㉠에서 $4-a < 2$ 이므로

$$b < 2$$

따라서 정수 b 의 최댓값은 1이다.

... 3단계

답 1



채점 요소	비율
1단계 a의 값의 범위 구하기	30 %
2단계 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
3단계 정수 b의 최댓값 구하기	40 %

0906 (i) a 가 짝수일 때

$$f(a)=\frac{a}{2} \text{이므로}$$

$$(h \circ g \circ f)(a)=(h \circ g)\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$=(h \circ g)\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a-4$$

$$\text{즉 } \frac{3}{2}a - 4 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{2}a = 9 \quad \therefore a = 6$$

... 1단계

(ii) a 가 홀수일 때

$$f(a) = a + 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= (h \circ g)(a + 1) \\ &= 3(a + 1) - 4 = 3a - 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 3a - 1 = 5 \text{ 이므로 } a = 2$$

이때 a 는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

... 2단계

(i), (ii)에서 $a = 6$

... 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 a 가 짝수일 때, a 의 값 구하기	40 %
2단계 a 가 홀수일 때, 조건을 만족시키지 않음을 알기	40 %
3단계 a 의 값 구하기	20 %

0907 $(g \circ f^{-1})(a) = 2$ 에서

$$g(f^{-1}(a)) = 2$$

$$f^{-1}(a) = k \text{ 라 하면 } g(k) = 2 \text{ 이므로}$$

$$-3k + 1 = 2 \quad \therefore k = -\frac{1}{3}$$

... 1단계

$$\text{따라서 } f^{-1}(a) = -\frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$a = f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3 = -\frac{11}{3}$$

... 2단계

답 $-\frac{11}{3}$

채점 요소	비율
1단계 $f^{-1}(a)$ 의 값 구하기	50 %
2단계 a 의 값 구하기	50 %

0908 $f(x) - 3f(2-x) = -4x$

..... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) - 3f(1) = -4, \quad -2f(1) = -4$$

$$\therefore f(1) = 2$$

... 1단계

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) - 3f(2) = 0$$

..... ㉡

㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) - 3f(0) = -8$$

..... ㉢

㉡ + ㉢ $\times 3$ 을 하면

$$-8f(0) = -24 \quad \therefore f(0) = 3$$

... 2단계

$$\therefore f(0) + f(1) = 3 + 2 = 5$$

... 3단계

답 5

채점 요소	비율
1단계 $f(1)$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $f(0)$ 의 값 구하기	50 %
3단계 $f(0) + f(1)$ 의 값 구하기	10 %

0909 전라 두 함수 f, g 의 식을 이용하여 함수 $g \circ f$ 의 식을 구한다.

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \\ x-1 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ -2x+4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

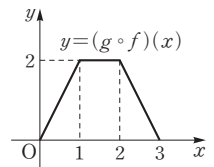
$$= \begin{cases} 2f(x) & (0 \leq f(x) < 1) \\ -2f(x)+4 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ -2 \times 1 + 4 & (1 \leq x < 2) \\ -2(x-1)+4 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ 2 & (1 \leq x < 2) \\ -2x+6 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 ①



RPM비법노트

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 주어졌을 때, 합성함수 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 각각 꺾인 점(함수식이 달라지는 경계)을 기준으로 정의역의 범위를 나누어 $f(x)$, $g(x)$ 의 식을 구한다.

(ii) $(g \circ f)(x)$ 의 식을 구하여 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프를 그린다.

0910 전라 $f(t)=t$ (t 는 상수)를 만족시키는 t 의 값을 $t < 2$ 인 경우와 $t \geq 2$ 인 경우로 나누어 구한다.

$$(f \circ f)(a) = f(a) \text{ 에서 } f(f(a)) = f(a)$$

$$\text{이때 } f(a) = t \text{ 라 하면 } f(t) = t$$

$t < 2$ 일 때 $f(t) = t$ 에서

$$2t + 2 = t \quad \therefore t = -2$$

$t \geq 2$ 일 때 $f(t) = t$ 에서

$$t^2 - 7t + 16 = t, \quad t^2 - 8t + 16 = 0$$

$$(t-4)^2 = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 $(f \circ f)(a) = f(a)$ 를 만족시키려면

$$f(a) = -2 \text{ 또는 } f(a) = 4$$

이어야 한다.

(i) $a < 2$ 일 때

$$f(a) = -2 \text{ 에서 } 2a + 2 = -2$$

$$\therefore a = -2$$

$$f(a) = 4 \text{ 에서 } 2a + 2 = 4$$

$$\therefore a = 1$$

(ii) $a \geq 2$ 일 때

$$f(a) = -2 \text{에서} \quad a^2 - 7a + 16 = -2$$

$$\therefore a^2 - 7a + 18 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -23 < 0$$

따라서 이를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

$$f(a) = 4 \text{에서} \quad a^2 - 7a + 16 = 4$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0, \quad (a-3)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 4$$

(i), (ii)에서

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 1 \text{ 또는 } a = 3 \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 구하는 합은

$$-2 + 1 + 3 + 4 = 6$$

답 6

다른 풀이 $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & (x < 2) \\ x^2-7x+16 & (x \geq 2) \end{cases}$ 에서

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \begin{cases} 2f(x)+2 & (f(x) < 2) \\ \{f(x)\}^2-7f(x)+16 & (f(x) \geq 2) \end{cases}$$

$x < 0$ 일 때, $f(x) < 2$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = 2(2x+2)+2 = 4x+6$$

$0 \leq x < 2$ 일 때, $f(x) \geq 2$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= (2x+2)^2 - 7(2x+2) + 16 \\ &= 4x^2 - 6x + 6 \end{aligned}$$

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) \geq 2$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= (x^2-7x+16)^2 - 7(x^2-7x+16) + 16 \\ &= x^4 - 14x^3 + 74x^2 - 175x + 160 \end{aligned}$$

$$\therefore (f \circ f)(x)$$

$$= \begin{cases} 4x+6 & (x < 0) \\ 4x^2-6x+6 & (0 \leq x < 2) \\ x^4-14x^3+74x^2-175x+160 & (x \geq 2) \end{cases}$$

(i) $a < 0$ 일 때

$$(f \circ f)(a) = f(a) \text{에서} \quad 4a+6 = 2a+2$$

$$\therefore a = -2$$

(ii) $0 \leq a < 2$ 일 때

$$(f \circ f)(a) = f(a) \text{에서} \quad 4a^2 - 6a + 6 = 2a + 2$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

(iii) $a \geq 2$ 일 때

$$(f \circ f)(a) = f(a) \text{에서}$$

$$a^4 - 14a^3 + 74a^2 - 175a + 160 = a^2 - 7a + 16$$

$$a^4 - 14a^3 + 73a^2 - 168a + 144 = 0$$

$$(a-3)^2(a-4)^2 = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 4$$

이상에서 $a = -2$ 또는 $a = 1$ 또는 $a = 3$ 또는 $a = 4$

0911 전략 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$,

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도

형의 넓이는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의

넓이의 2배이다.

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x < 1$ 일 때

$$\frac{1}{2}x = x \text{에서} \quad x = 0$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$\frac{3}{2}x - 1 = x \text{에서} \quad x = 2$$

(i), (ii)에서 교점의 좌표는 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \right) = 1$$

답 1

다른 풀이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와

그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오

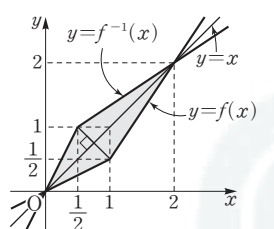
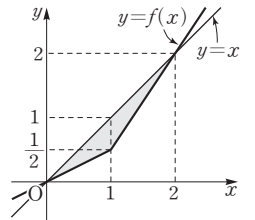
른쪽 그림과 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$,

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도

형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2+2^2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \end{aligned}$$



09 유리함수

교과서 문제 정복하기

• 본책 137쪽, 139쪽

0912 답 (1) ㄱ, ㄹ, ㅂ (2) ㄴ, ㄷ, ㄹ

0913 $\frac{c}{3ab^2x}, \frac{a}{2bcx^2}$ 의 분모의 최소공배수가 $6ab^2cx^2$ 이므로 두 유리식을 통분하면

$$\frac{2c^2x}{6ab^2cx^2}, \frac{3a^2b}{6ab^2cx^2} \quad \text{답} \quad \frac{2c^2x}{6ab^2cx^2}, \frac{3a^2b}{6ab^2cx^2}$$

0914 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$,
 $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ 이므로 두 유리식을 통분하면

$$\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-3)}, \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)}$$

$$\text{답} \quad \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-3)}, \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)}$$

0915 답 $\frac{3ax^2}{2y}$

0916 $\frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$ 답 $\frac{x-4}{x+1}$

0917 $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2(x-2)+x+1}{(x+1)(x-2)}$
 $= \frac{3x-3}{(x+1)(x-2)}$
답 $\frac{3x-3}{(x+1)(x-2)}$

0918 $\frac{1}{x+3} - \frac{x-4}{x^2+3x} = \frac{1}{x+3} - \frac{x-4}{x(x+3)}$
 $= \frac{x-(x-4)}{x(x+3)}$
 $= \frac{4}{x(x+3)}$ 답 $\frac{4}{x(x+3)}$

0919 $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5} \times \frac{x-5}{x^2+2x-3}$
 $= \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-5)} \times \frac{x-5}{(x+3)(x-1)}$
 $= \frac{x-2}{(x+1)(x-1)}$ 답 $\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}$

0920 $\frac{x-3}{x+5} \div \frac{x^2-9}{x^2-25} = \frac{x-3}{x+5} \div \frac{(x+3)(x-3)}{(x+5)(x-5)}$
 $= \frac{x-3}{x+5} \times \frac{(x+5)(x-5)}{(x+3)(x-3)}$
 $= \frac{x-5}{x+3}$ 답 $\frac{x-5}{x+3}$

0921 $\frac{x+5}{x-1} + \frac{2-x}{x+3} = \frac{(x-1)+6}{x-1} + \frac{-(x+3)+5}{x+3}$
 $= 1 + \frac{6}{x-1} - 1 + \frac{5}{x+3}$
 $= \frac{6(x+3)+5(x-1)}{(x-1)(x+3)}$
 $= \frac{11x+13}{(x-1)(x+3)}$
답 $\frac{11x+13}{(x-1)(x+3)}$

0922 $\frac{x^2-2x+1}{x-2} - \frac{x^2+2x-2}{x+2}$
 $= \frac{x(x-2)+1}{x-2} - \frac{x(x+2)-2}{x+2}$
 $= x + \frac{1}{x-2} - x + \frac{2}{x+2}$
 $= \frac{x+2+2(x-2)}{(x-2)(x+2)}$
 $= \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}$ 답 $\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}$

0923 $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$
 $= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)$
 $= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$
 $= \frac{2}{(x+1)(x+3)}$ 답 $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

0924 $\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{x+4-x}{x(x+4)}$
 $= \frac{2}{x(x+4)}$ 답 $\frac{2}{x(x+4)}$

0925 $\frac{\frac{x+4}{1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+4} \times \frac{x+1}{1} = \frac{x+1}{x+4}$ 답 $\frac{x+1}{x+4}$

0926 $\frac{\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \frac{1}{x} \times \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2x-1}$
답 $\frac{1}{2x-1}$

0927 $x:y=2:5$ 이므로 $x=2k, y=5k(k \neq 0)$ 로 놓으면
 $\frac{2x-y}{x+y} = \frac{4k-5k}{2k+5k} = \frac{-k}{7k} = -\frac{1}{7}$ 답 $-\frac{1}{7}$

0928 $x:y=3:2$ 이므로 $x=3k, y=2k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2} = \frac{9k^2+4k^2}{9k^2-6k^2+4k^2} \\ = \frac{13k^2}{7k^2} = \frac{13}{7}$$

답 $\frac{13}{7}$

0929 $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5} = k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$x=3k, y=2k, z=5k$$

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{6k^2+10k^2+15k^2}{9k^2+4k^2+25k^2} \\ = \frac{31k^2}{38k^2} = \frac{31}{38}$$

답 $\frac{31}{38}$

0930 **답** (1) ㄱ, ㄷ, ㄱ (2) ㄴ, ㄹ, ㅅ

0931 $x+3=0$ 에서 $x=-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$ 이다.

답 $\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$

0932 $2-x=0$ 에서 $x=2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$ 이다.

답 $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$

0933 $x^2-1=0$ 에서 $x=\pm 1$

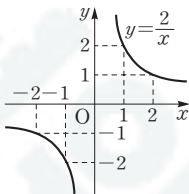
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$ 이다.

답 $\{x|x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$

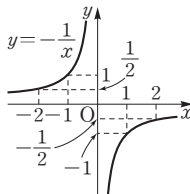
0934 $x^2+4>0$ 이므로 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

답 $\{x|x \text{는 실수}\}$

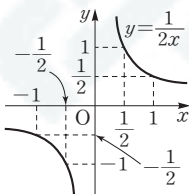
0935 **답**



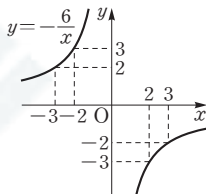
0936 **답**



0937 **답**



0938 **답**



0939 **답** $y = \frac{1}{x-2} + 3$

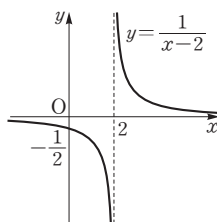
0940 $y = \frac{1}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식은 $x=2, y=0$

이다.



답 풀이 참조

0941 $y = -\frac{1}{x} + 1$ 의 그래프는

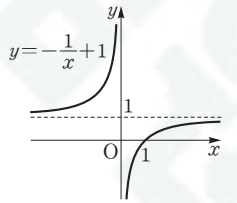
$y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y|y \neq 1 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식은 $x=0, y=1$

이다.



답 풀이 참조

0942 $y = \frac{2}{x-1} - 3$ 의 그래프는

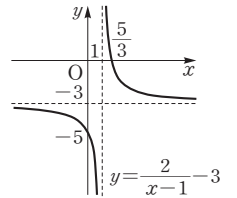
$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \neq 1 \text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y|y \neq -3 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식은 $x=1, y=-3$

이다.



답 풀이 참조

0943 $y = -\frac{1}{x+2} + 1$ 의 그래프

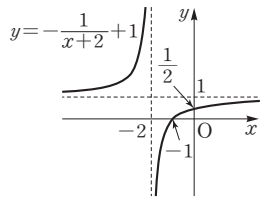
는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \neq -2 \text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y|y \neq 1 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식은 $x=-2, y=1$

이다.



답 풀이 참조

0944 $y = \frac{4x+1}{x-1} = \frac{4(x-1)+5}{x-1}$

$$= \frac{5}{x-1} + 4$$

답 $y = \frac{5}{x-1} + 4$

0945 $y = \frac{-3x+5}{x-2} = \frac{-3(x-2)-1}{x-2}$

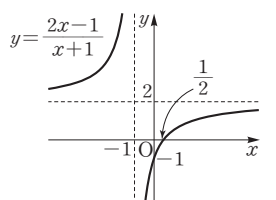
$$= -\frac{1}{x-2} - 3$$

답 $y = -\frac{1}{x-2} - 3$

0946 $y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = -\frac{3}{x+1} + 2$

따라서 주어진 함수의 그래프는

$y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



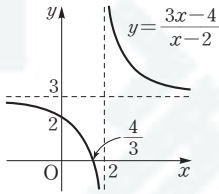
정의역은 $\{x|x \neq -1 \text{인 실수}\}$,
 치역은 $\{y|y \neq 2 \text{인 실수}\}$,
 점근선의 방정식은 $x = -1, y = 2$

이다.

답 풀이 참조

$$0947 \quad y = \frac{3x-4}{x-2} = \frac{3(x-2)+2}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 3$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$,
 치역은 $\{y|y \neq 3 \text{인 실수}\}$,
 점근선의 방정식은 $x = 2, y = 3$

이다.

답 풀이 참조

유형 익히기

• 본책 140~149쪽

$$0948 \quad \frac{x^2+x-2}{x^2-9} \div \frac{x^2-3x+2}{x+3} \times \frac{x-2}{x^2+2x}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-3)} \div \frac{(x-1)(x-2)}{x+3} \times \frac{x-2}{x(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-3)} \times \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} \times \frac{x-2}{x(x+2)}$$

$$= \frac{1}{x(x-3)} \quad \text{답} \quad \frac{1}{x(x-3)}$$

$$0949 \quad \frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3+x}{x^2-1} = \frac{x+2}{x(x+1)} - \frac{3+x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1) - x(3+x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2+x-2 - (3x+x^2)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= -\frac{2}{x(x-1)} \quad \text{답} \quad -\frac{2}{x(x-1)}$$

$$0950 \quad \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a^2+1} - \frac{4}{a^4+1}$$

$$= \frac{a+1-(a-1)}{(a-1)(a+1)} - \frac{2}{a^2+1} - \frac{4}{a^4+1}$$

$$= \frac{2}{a^2-1} - \frac{2}{a^2+1} - \frac{4}{a^4+1}$$

$$= \frac{2(a^2+1)-2(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2+1)} - \frac{4}{a^4+1}$$

$$= \frac{4}{a^4-1} - \frac{4}{a^4+1} = \frac{4(a^4+1)-4(a^4-1)}{(a^4-1)(a^4+1)}$$

$$= \frac{8}{a^8-1} \quad \text{답} \quad ①$$

$$0951 \quad \frac{x^3-y^3}{2(x+y)} \div \frac{x^2-y^2}{4x^2+8xy+4y^2}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2(x+y)} \div \frac{(x+y)(x-y)}{4(x+y)^2}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2(x+y)} \times \frac{4(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$= 2(x^2+y^2+xy)$$

$$= 2 \times (6+2) = 16 \quad \text{답} \quad 16$$

0952 주어진 등식의 좌변을 통분하면

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{(a+b)x+a-2b}{x^2-x-2}$$

$$\text{즉 } \frac{(a+b)x+a-2b}{x^2-x-2} = \frac{5x+2}{x^2-x-2} \text{가 } x \text{에 대한 항등식이므로}$$

양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b=5, a-2b=2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=1$

$$\therefore ab=4 \quad \text{답} \quad ②$$

다른 풀이 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ 이므로 주어진 등식의 양변에 $(x-2)(x+1)$ 을 곱하면

$$a(x+1)+b(x-2)=5x+2$$

$$\therefore (a+b)x+a-2b=5x+2$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b=5, a-2b=2$$

RPM비법노트

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식

$$\Leftrightarrow a=0, b=0, c=0$$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식

$$\Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'$$

0953 주어진 등식의 우변을 통분하면

$$\frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{2(x^2+x+1)+(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{3x^2+3}{x^3-1}$$

즉 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3-1} = \frac{3x^2+3}{x^3-1}$ 이 x 에 대한 항등식이므로 양변의

분자의 동류항의 계수를 비교하면 $a=3, b=0, c=3$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=18 \quad \text{답} \quad 18$$

0954 주어진 등식의 우변을 통분하면

$$\frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{a(1-x)^2+b(1+x)(1-x)+c(1+x)}{(1+x)(1-x)^2}$$

$$= \frac{(a-b)x^2+(-2a+c)x+a+b+c}{x^3-x^2-x+1}$$

... 1단계

즉

$$\frac{5-x^2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{(a-b)x^2 + (-2a+c)x + a+b+c}{x^3-x^2-x+1}$$

가 x 에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a-b=-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$-2a+c=0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$a+b+c=5 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠+㉢을 하면 $2a+c=4 \quad \dots\dots ㉣$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1, c=2$

㉠에 $a=1$ 을 대입하면 $1-b=-1 \quad \therefore b=2 \quad \dots\dots ㉤$

$\therefore abc=4 \quad \dots\dots ㉥$

답 4

	채점 요소	비율
1단계	주어진 식의 우변을 통분하기	50 %
2단계	a, b, c 의 값 구하기	40 %
3단계	abc 의 값 구하기	10 %

$$\begin{aligned} 0955 \quad & \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+4}{x+3} + \frac{x+5}{x+4} \\ &= \frac{(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+2)+1}{x+2} - \frac{(x+3)+1}{x+3} + \frac{(x+4)+1}{x+4} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+4}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{(x+3)(x+4) - (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

즉

$$\begin{aligned} & \frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{ax+b}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

가 x 에 대한 항등식이므로 $a=4, b=10$

$\therefore a-b=-6$

답 ①

$$\begin{aligned} 0956 \quad & \frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x} - \frac{x^2+x-1}{x^2+x-2} - 1 \\ &= \frac{2(x^2+2x)+1}{x^2+2x} - \frac{(x^2+x-2)+1}{x^2+x-2} - 1 \\ &= \left(2 + \frac{1}{x^2+2x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x^2+x-2}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2+x-2} \\ &= \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x-1)} \\ &= -\frac{1}{x(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{x(x+2)(x-1)}$

$$\begin{aligned} 0957 \quad & x^3+1=x(x^2-x)+(x^2-x)+x+1 \\ &= (x^2-x)(x+1)+x+1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \frac{x^3+1}{x^2-x} = \frac{(x^2-x)(x+1)+x+1}{x^2-x} = x+1 + \frac{x+1}{x^2-x} \\ x^2 &= x(x+1) - (x+1) + 1 = (x+1)(x-1) + 1 \text{ 이므로} \\ & \frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1} \\ \therefore & \frac{x^3+1}{x^2-x} - \frac{x^2}{x+1} - 2 \\ &= x+1 + \frac{x+1}{x^2-x} - \left(x-1 + \frac{1}{x+1}\right) - 2 \\ &= \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x-1)} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)^2 - x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{3x+1}{x^3-x} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0958 \quad & \frac{3}{x(x+3)} + \frac{4}{(x+3)(x+7)} + \frac{5}{(x+7)(x+12)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7}\right) + \left(\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+12}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+12} = \frac{12}{x(x+12)} \\ \text{즉} \quad & \frac{12}{x(x+12)} = \frac{a}{x(x+b)} \text{가 } x \text{에 대한 항등식이므로} \\ & a=12, b=12 \quad \therefore a+b=24 \end{aligned}$$

답 24

$$\begin{aligned} 0959 \quad & \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots + \frac{1}{23 \times 25} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{25}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25}\right) = \frac{2}{25} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{25}$

$$\begin{aligned} 0960 \quad & \frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} \\ &= \frac{1}{(x-1)x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ & \quad + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{4}{(x-1)(x+3)} \end{aligned}$$

즉 $\frac{4}{(x-1)(x+3)} = \frac{m}{(x-1)(x+n)}$ 이 x 에 대한 항등식이므로

$$m=4, n=3$$

$$\therefore m+n=7$$

답 7

$$\begin{aligned} 0961 \quad f(x) &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(x+998)(x+999)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+998} - \frac{1}{x+999}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+999} = \frac{999}{x(x+999)} \\ \therefore f(111) &= \frac{999}{111 \times (111+999)} = \frac{3}{370} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{370}$

$$\begin{aligned} 0962 \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}}}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{-1}{x-1}} \\ &= 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

즉 $f(x)=x-1$ 이므로
 $f(10)=10-1=9$

답 9

$$\begin{aligned} 0963 \quad f(x) &= 1 - \frac{1 + \frac{1}{x+1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = 1 - \frac{\frac{x+2}{x+1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= 1 - \frac{x+2}{x} = -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

따라서 $f(a)=\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{2}{a}=\frac{1}{4}$
 $\therefore a=-8$

답 -8

$$\begin{aligned} 0964 \quad \frac{43}{15} &= 2 + \frac{13}{15} = 2 + \frac{1}{\frac{15}{13}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{13}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=1, c=6, d=2$ 이므로
 $a+b+c+d=11$

답 ②

0965 $x^2+4x-1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x+4-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=-4$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^2+9x+1-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2} \\ &= 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+9\left(x-\frac{1}{x}\right)+1 \\ &= 2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+9\left(x-\frac{1}{x}\right)+1 \\ &= 2 \times \{(-4)^2+2\}+9 \times (-4)+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 ①

0966 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=5+2=7$ 이므로

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{7} \quad (\because x>0)$$

... 1단계

$$\begin{aligned} \therefore x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= (\sqrt{7})^3-3 \times \sqrt{7}=4\sqrt{7} \end{aligned}$$

... 2단계

답 $4\sqrt{7}$

채점 요소		비율
1단계	$x+\frac{1}{x}$ 의 값 구하기	50 %
2단계	$x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값 구하기	50 %

0967 $x^2-3x+1=0$ 에서 $x>1$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x-3+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=3$$

이때 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$ 이므로

$$x-\frac{1}{x}=\sqrt{5} \quad (\because x>1)$$

또 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$ 이므로

$$\begin{aligned} x^4-\frac{1}{x^4} &= \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= 7 \times 3 \times \sqrt{5}=21\sqrt{5} \end{aligned}$$

답 ③

0968 $a+b+c=0$ 에서

$$a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$$

이므로

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \\ &= \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \\ &= \frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c} \\ &= -1+(-1)+(-1)=-3 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 $a+b+c=0$ 에서

$$a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$$

이므로

$$\begin{aligned} & a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ &= a \times \frac{b+c}{bc} + b \times \frac{c+a}{ca} + c \times \frac{a+b}{ab} \\ &= a \times \frac{-a}{bc} + b \times \frac{-b}{ca} + c \times \frac{-c}{ab} \\ &= -\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $a^3+b^3+c^3=3abc$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 (주어진 식) $= -\frac{3abc}{abc} = -3$

0969 $a+b+c=0$ 에서

$$a=-b-c, b=-c-a, c=-a-b$$

이므로

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a-c}{b}-1\right)\left(\frac{b-a}{c}-1\right)\left(\frac{c-b}{a}-1\right) \\ &= \frac{a-c-b}{b} \times \frac{b-a-c}{c} \times \frac{c-b-a}{a} \\ &= \frac{a+a}{b} \times \frac{b+b}{c} \times \frac{c+c}{a} \\ &= \frac{2a}{b} \times \frac{2b}{c} \times \frac{2c}{a} = 8 \quad \text{답 8} \end{aligned}$$

0970 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 에서

$$\begin{aligned} & \frac{ab+bc+ca}{abc}=0 \quad \therefore ab+bc+ca=0 \\ & \therefore \frac{a}{(a+b)(c+a)} + \frac{b}{(b+c)(a+b)} + \frac{c}{(c+a)(b+c)} \\ &= \frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0 \quad \text{답 ③} \end{aligned}$$

0971 $(x+y):(y+z):(z+x)=3:4:5$ 이므로

$$x+y=3k, y+z=4k, z+x=5k (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} & 2(x+y+z)=12k \\ & \therefore x+y+z=6k \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $x=2k, y=k, z=3k$

$$\therefore \frac{xy+2yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2k^2+6k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2} = \frac{14k^2}{14k^2} = 1$$

답 1

0972 $x^2-3xy+2y^2=0$ 에서 $(x-2y)(x-y)=0$

$$\therefore x=2y (\because x \neq y)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2-xy+3y^2}{xy-2x^2} &= \frac{4y^2-2y^2+3y^2}{2y^2-8y^2} \\ &= \frac{5y^2}{-6y^2} = -\frac{5}{6} \quad \text{답 } -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

0973 $\frac{x+3y}{2} = \frac{y+2z}{3} = \frac{z}{4} = k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$x+3y=2k, y+2z=3k, z=4k$$

$z=4k$ 를 $y+2z=3k$ 에 대입하면 $y+8k=3k$

$$\therefore y=-5k$$

$y=-5k$ 를 $x+3y=2k$ 에 대입하면 $x-15k=2k$

$$\therefore x=17k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x+2y+2z}{2x+y-6z} &= \frac{17k-10k+8k}{34k-5k-24k} \\ &= \frac{15k}{5k} = 3 \quad \text{답 3} \end{aligned}$$

0974 $2x+y-3z=0$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$x-y+6z=0$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$3x+3z=0 \quad \therefore z=-x$$

$z=-x$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2x+y+3x=0 \quad \therefore y=-5x$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{xy+yz-zx}{x^2+yz} &= \frac{-5x^2+5x^2+x^2}{x^2+5x^2} \\ &= \frac{x^2}{6x^2} = \frac{1}{6} \quad \text{답 ③} \end{aligned}$$

0975 $y = \frac{2x+b}{x+a} = \frac{2(x+a)-2a+b}{x+a} = \frac{-2a+b}{x+a} + 2$

의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{-2a+b}{x-1+a} + 2 + c$$

이 함수의 그래프가 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 일치하므로

$$-2a+b=3, -1+a=0, 2+c=0$$

$$\therefore a=1, b=5, c=-2$$

$$\therefore abc=-10$$

답 -10

다른 풀이 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 - c 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{3}{x+1} - c = \frac{3-c(x+1)}{x+1} = \frac{-cx-c+3}{x+1}$$

이 함수의 그래프가 $y = \frac{2x+b}{x+a}$ 의 그래프와 일치하므로

$$-c=2, -c+3=b, 1=a$$

$$\therefore a=1, b=5, c=-2$$

$$\begin{aligned} 0976 \quad y &= \frac{3x-1}{2x-1} = \frac{\frac{3}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2} \quad \dots \text{1단계} \end{aligned}$$

따라서 $y = \frac{3x-1}{2x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, k = 4 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore a+b+k=6 \quad \dots \text{3단계}$$

답 6

채점 요소	비율
1단계 $y = \frac{3x-1}{2x-1}$ 을 변형하기	50%
2단계 a, b, k 의 값 구하기	40%
3단계 $a+b+k$ 의 값 구하기	10%

$$\begin{aligned} 0977 \quad ① \quad y &= \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2(x-3)+5}{x-3} = \frac{5}{x-3} + 2 \\ ② \quad y &= \frac{2x+3}{2x-1} = \frac{(2x-1)+4}{2x-1} = \frac{4}{2x-1} + 1 = \frac{2}{x-\frac{1}{2}} + 1 \end{aligned}$$

$$③ \quad y = \frac{2x+8}{x+3} = \frac{2(x+3)+2}{x+3} = \frac{2}{x+3} + 2$$

$$④ \quad y = \frac{x+1}{2-x} = \frac{-(x-2)-3}{x-2} = -\frac{3}{x-2} - 1$$

$$\begin{aligned} ⑤ \quad y &= \frac{4x-6}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-4}{2x-1} = -\frac{4}{2x-1} + 2 \\ &= -\frac{2}{x-\frac{1}{2}} + 2 \end{aligned}$$

이므로 $y = \frac{4x-6}{2x-1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 평행이동에 의하여 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

$$0978 \quad y = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

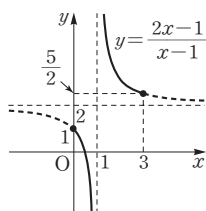
이므로 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0 \leq x < 1$ 또는 $1 < x \leq 3$ 에서

$y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 치역은

$$\left\{ y \mid y \leq 1 \text{ 또는 } y \geq \frac{5}{2} \right\}$$



답 ①

$$\begin{aligned} 0979 \quad y &= \frac{bx+4}{3x+a} = \frac{\frac{b}{3}(3x+a) - \frac{ab}{3} + 4}{3x+a} \\ &= \frac{-\frac{ab}{3} + 4}{3x+a} + \frac{b}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$\text{정의역은 } \left\{ x \mid x \neq -\frac{a}{3} \text{인 실수} \right\},$$

$$\text{치역은 } \left\{ y \mid y \neq \frac{b}{3} \text{인 실수} \right\}$$

따라서 $-\frac{a}{3} = -1, \frac{b}{3} = 3$ 이므로

$$a = 3, b = 9$$

$$\therefore a+b=12$$

답 12

$$0980 \quad y = \frac{2x+6}{x+1} = \frac{2(x+1)+4}{x+1} = \frac{4}{x+1} + 2$$

이므로 $y = \frac{2x+6}{x+1}$ 의 그래프는 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y \leq 0$ 또는 $y \geq 4$ 에서

$y = \frac{2x+6}{x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 정의역은

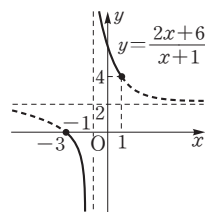
$$\{x \mid -3 \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1\}$$

따라서 정의역에 속하는 정수는 $-3, -2,$

$0, 1$ 이므로 구하는 합은

$$-3 + (-2) + 0 + 1 = -4$$

답 -4



$$0981 \quad y = \frac{3x+1}{x+a} = \frac{3(x+a)-3a+1}{x+a} = \frac{-3a+1}{x+a} + 3$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -a, y = 3$$

따라서 $2 = -a, b = 3$ 이므로

$$a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

답 ②

$$0982 \quad y = \frac{2x-3}{-x-3} = \frac{-2(x+3)+9}{x+3} = \frac{9}{x+3} - 2$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -3, y = -2$$

$$y = \frac{ax+2}{3x+b} = \frac{\frac{a}{3}(3x+b) - \frac{ab}{3} + 2}{3x+b} = \frac{-\frac{ab}{3} + 2}{3x+b} + \frac{a}{3}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{3}, y = \frac{a}{3}$$

두 점근선의 방정식이 같으므로

$$-3 = -\frac{b}{3}, -2 = \frac{a}{3}$$

$$\therefore a = -6, b = 9$$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

$$\begin{aligned} 0983 \quad y &= \frac{bx+c}{ax-2} = \frac{\frac{b}{a}(ax-2) + \frac{2b}{a} + c}{ax-2} \\ &= \frac{\frac{2b}{a} + c}{ax-2} + \frac{b}{a} \end{aligned}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2}{a}, y = \frac{b}{a}$$

따라서 $\frac{2}{a}=2, \frac{b}{a}=3$ 이므로 $a=1, b=3$

즉 $y = \frac{3x+c}{x-2}$ 의 그래프가 점 (3, 4)를 지나므로

$$4=9+c \quad \therefore c=-5$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

답 ③

다른 풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2, y=3$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} + 3 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$$

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 (3, 4)를 지나므로

$$4=k+3 \quad \therefore k=1$$

$k=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$y = \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{1+3(x-2)}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2}$$

따라서 $a=1, b=3, c=-5$ 이므로

$$a+b+c=-1$$

$$0984 \quad y = \frac{2x+1}{x+4} = \frac{2(x+4)-7}{x+4} = -\frac{7}{x+4} + 2$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-4, y=2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 (-4, 2)에 대하여 대칭이므로

$$p=-4, q=2$$

또 직선 $y=x+a$ 가 점 (-4, 2)를 지나므로

$$2=-4+a \quad \therefore a=6$$

$$\therefore a+p+q=4$$

답 ③

$$0985 \quad y = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 3$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2, y=3$$

따라서 직선 $y=-x+k$ 가 두 점근선의 교점 (2, 3)을 지나므로

$$3=-2+k \quad \therefore k=5$$

답 5

$$0986 \quad y = \frac{ax+3}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab+3}{x+b} = \frac{-ab+3}{x+b} + a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-b, y=a$$

따라서 두 직선 $y=x+2, y=-x-3$ 이 두 점근선의 교점

$(-b, a)$ 를 지나므로

$$a=-b+2, a=b-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2} \quad \therefore ab=-\frac{5}{4}$$

답 $-\frac{5}{4}$

$$0987 \quad y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c} = \frac{-ac+b}{x+c} + a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-c, y=a$$

이 함수의 그래프가 점 (-2, 1)에 대하여 대칭이므로

$$-c=-2, a=1 \quad \therefore a=1, c=2$$

즉 $y = \frac{x+b}{x+2}$ 의 그래프의 x 절편이 1이므로

$$0 = \frac{1+b}{3} \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore abc=-2$$

답 -2

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 점 (-2, 1)에 대하여 대칭이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+2} + 1 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ㉡$$

로 놓으면 ㉡의 그래프의 x 절편이 1이므로

$$0 = \frac{k}{3} + 1 \quad \therefore k=-3$$

$k=-3$ 을 ㉡에 대입하면

$$y = \frac{-3}{x+2} + 1 = \frac{-3+(x+2)}{x+2} = \frac{x-1}{x+2}$$

따라서 $a=1, b=-1, c=2$ 이므로

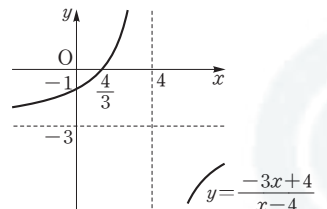
$$abc=-2$$

$$0988 \quad y = \frac{-3x+4}{x-4} = \frac{-3(x-4)-8}{x-4} = -\frac{8}{x-4} - 3$$

이므로 $y = \frac{-3x+4}{x-4}$ 의 그래프는 $y = -\frac{8}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \frac{-3x+4}{x-4}$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2사분면을 지나지 않는다.



답 ②

0989 $y = \frac{k}{x-3} + 2$ 의 그래프는 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$k > 0$ 에서 $y = \frac{k}{x-3} + 2$ 의 그래프가

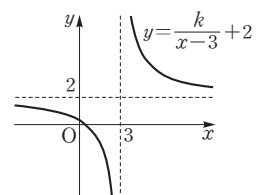
제 3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 일 때 y 의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$-\frac{k}{3} + 2 \geq 0, \quad \frac{k}{3} \leq 2$$

$$\therefore k \leq 6$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 6이다.

답 ④



$$0990 \quad y = \frac{4x+a-1}{x+2} = \frac{4(x+2)+a-9}{x+2} = \frac{a-9}{x+2} + 4$$

이므로 $y = \frac{4x+a-1}{x+2}$ 의 그래프는 $y = \frac{a-9}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다. 이때 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

(i) $a-9 < 0$ 이어야 하므로

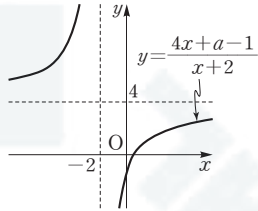
$$a < 9$$

(ii) $x=0$ 일 때 y 의 값이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{a-1}{2} < 0 \quad \therefore a < 1$$

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값의 범위는 $a < 1$ 답 a < 1

참고 $a > 9$ 이면 $y = \frac{4x+a-1}{x+2}$ 의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다. 또 $a = 9$ 이면 $y = 4$ 이므로 그래프는 제3, 4사분면을 지나지 않는다.



0991 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \quad (k < 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면 $\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{-2} + 1 \quad \therefore k = -2$$

$k = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = \frac{-2}{x-2} + 1 = \frac{-2+(x-2)}{x-2} = \frac{x-4}{x-2}$$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=-2$ 이므로

$$abc = 8 \quad \text{답 ④}$$

0992 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-2$ 이므로 $p=4$, $q=-2$... 1단계

따라서 $y = \frac{a}{x-4} - 2$ 의 그래프가 점 $(8, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{a}{8-4} - 2 \quad \therefore a = 8 \quad \dots\dots \text{2단계}$$

$$\therefore a+p+q = 10 \quad \dots\dots \text{3단계}$$

답 10

채점 요소	비율
1단계 p, q 의 값 구하기	40%
2단계 a 의 값 구하기	40%
3단계 $a+p+q$ 의 값 구하기	20%

0993 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+2} + 1 \quad (k < 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면 $\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{2} + 1 \quad \therefore k = -2$$

$k = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = \frac{-2}{x+2} + 1 = \frac{-2+(x+2)}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

따라서 $a=0$, $b=1$, $c=2$ 이므로

$$a-b-c = -3 \quad \text{답 -3}$$

$$0994 \quad y = \frac{-4x-2}{x-1} = \frac{-4(x-1)-6}{x-1} = -\frac{6}{x-1} - 4$$

① 정의역은 $\{x | x \neq 1 \text{인 실수}\}$ 이다.

② 그래프는 $y = -\frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-4$ 이다.

④ $y = \frac{-4x-2}{x-1}$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{-4x-2}{x-1}, \quad -4x-2=0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

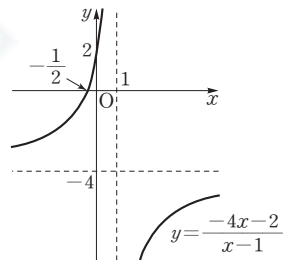
즉 그래프와 x 축의 교점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 이다.

⑤ $y = \frac{-4x-2}{x-1}$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤



0995 $y = -\frac{1}{x+3} - 5$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=-5$ 이므로 그래프는 점 $(-3, -5)$ 에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $y = -\frac{1}{x+3} - 5$ 의 그래프는

$y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

즉 그래프는 제 1사분면을 지나지 않는다. (참)

$$ㄷ. y = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 4$$

따라서 $y = -\frac{1}{x+3} - 5$ 의 그래프와 $y = \frac{4x-7}{x-2}$ 의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 없다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

$$0996 \quad y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 2$$

이므로 $y = \frac{2x-5}{x-3}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ 에서 $y = \frac{2x-5}{x-3}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때 최댓값 $\frac{7}{4}$,

$x = \frac{5}{2}$ 일 때 최솟값 0

을 갖는다.

즉 $M = \frac{7}{4}$, $m = 0$ 이므로 $M + m = \frac{7}{4}$

답 ④

0997 $y = \frac{3x-2}{x-2} = \frac{3(x-2)+4}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 3$

이므로 $y = \frac{3x-2}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3 \leq x \leq a$ 에서 $y = \frac{3x-2}{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 $x = 3$ 일 때 최댓값 7을 가지므로

$M = 7$

$x = a$ 일 때 최솟값 4를 가지므로

$\frac{4}{a-2} + 3 = 4 \quad \therefore a = 6$

$\therefore a + M = 13$

답 13

0998 $y = \frac{ax+2}{x-1} = \frac{a(x-1)+a+2}{x-1} = \frac{a+2}{x-1} + a$

이므로 $y = \frac{ax+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{a+2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a > 0$ 에서 $a+2 > 0$ 이므로

$2 \leq x \leq 5$ 에서 $y = \frac{ax+2}{x-1}$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

즉 $x = 2$ 일 때 최댓값 8을 가지므로

$2a+2=8 \quad \therefore a=3$

따라서 $y = \frac{3x+2}{x-1}$ 이고, 이 함수는 $x = 5$ 일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$\frac{3 \times 5 + 2}{5 - 1} = \frac{17}{4}$

답 ②

0999 $y = \frac{x+2}{3x+a}$ 로 놓으면 $y(3x+a) = x+2$

$(3y-1)x = -ay+2 \quad \therefore x = \frac{-ay+2}{3y-1}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-ax+2}{3x-1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax+2}{3x-1}$

이때 $f = f^{-1}$ 이므로 $\frac{x+2}{3x+a} = \frac{-ax+2}{3x-1}$

$\therefore a = -1$

답 -1

다른 풀이 $f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = \frac{x+2}{3x+a}$ 에서

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+2}{3x+a}\right)$

$= \frac{\frac{x+2}{3x+a} + 2}{3 \times \frac{x+2}{3x+a} + a}$

$= \frac{7x+2a+2}{3(a+1)x+a^2+6}$

즉 $\frac{7x+2a+2}{3(a+1)x+a^2+6} = x$ 이므로

$7x+2a+2 = 3(a+1)x^2 + (a^2+6)x$

$\therefore 3(a+1)x^2 + (a^2-1)x - 2a-2 = 0$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$a+1=0, a^2-1=0, -2a-2=0$

$\therefore a = -1$

1000 $y = \frac{-x-1}{x+a}$ 로 놓으면

$y(x+a) = -x-1$

$(y+1)x = -ay-1 \quad \therefore x = \frac{-ay-1}{y+1}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-ax-1}{x+1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax-1}{x+1}$

즉 $\frac{-ax-1}{x+1} = \frac{2x+b}{cx+1}$ 이므로

$-a=2, -1=b, 1=c$

$\therefore a=-2, b=-1, c=1$

$\therefore a+b+c=-2$

답 -2

1001 두 함수 $y = \frac{x+3}{x+2}$, $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = x$

에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다. ... 1단계

$y = \frac{x+3}{x+2}$ 에서 $y(x+2) = x+3$

$(y-1)x = -2y+3 \quad \therefore x = \frac{-2y+3}{y-1}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-2x+3}{x-1}$

따라서 $y = \frac{x+3}{x+2}$ 의 역함수는 $y = \frac{-2x+3}{x-1}$ 이다. ... 2단계

즉 $\frac{ax+b}{x-1} = \frac{-2x+3}{x-1}$ 이므로

$a=-2, b=3 \quad \therefore a+b=1$

... 3단계

답 1

채점 요소		비율
1단계	주어진 두 함수가 서로 역함수 관계임을 알기	30 %
2단계	$y = \frac{x+3}{x+2}$ 의 역함수 구하기	50 %
3단계	$a+b$ 의 값 구하기	20 %

1002 $y = \frac{ax+b}{x+1}$ 의 그래프가 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{-2a+b}{-2+1} \quad \therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $y = \frac{ax+b}{x+1}$ 의 역함수의 그래프가 점 $(-2, 3)$ 을 지나면

$y = \frac{ax+b}{x+1}$ 의 그래프는 점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = \frac{3a+b}{3+1} \quad \therefore 3a+b=-8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-5$$

$$\therefore ab=5$$

답 5

1003 $(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(2) + (f \circ f^{-1})(3) = f^{-1}(2) + 3$

$f^{-1}(2) = k$ 라 하면 $f(k) = 2$ 이므로

$$\frac{k+5}{2k+1} = 2, \quad k+5=4k+2 \quad \therefore k=1$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(2) + (f \circ f^{-1})(3) = f^{-1}(2) + 3 = 1 + 3 = 4$$

답 5

1004 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(4) = (f^{-1} \circ g)(4)$

$$= f^{-1}(g(4))$$

$$= f^{-1}(4) \quad \leftarrow g(4) = \frac{2 \times 4}{4-2} = 4$$

$f^{-1}(4) = k$ 라 하면 $f(k) = 4$ 이므로

$$\frac{k+4}{k-1} = 4, \quad k+4=4k-4 \quad \therefore k=\frac{8}{3}$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(4) = f^{-1}(4) = \frac{8}{3}$$

답 4

1005 $g(1) = 2$ 에서 $f(2) = 1$ 이므로

$$\frac{2a-1}{2b+1} = 1, \quad 2a-1=2b+1$$

$$\therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(1) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{a-1}{b+1} = \frac{1}{2}, \quad 2a-2=b+1$$

$$\therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

$g(3) = k$ 라 하면 $f(k) = 3$ 이므로

$$\frac{2k-1}{k+1} = 3, \quad 2k-1=3k+3$$

$$\therefore k=-4$$

$g(-4) = t$ 라 하면 $f(t) = -4$ 이므로

$$\frac{2t-1}{t+1} = -4, \quad 2t-1=-4t-4$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (g \circ g)(3) = g(g(3)) = g(-4) = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

1006 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = -2x + k$ 가 한 점에서

만나려면 방정식

$$\frac{3}{x} = -2x + k, \quad \text{즉 } 2x^2 - kx + 3 = 0$$

이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$$

$$k^2 = 24 \quad \therefore k = 2\sqrt{6} \quad (\because k > 0)$$

답 4

1007 함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y = mx + 1$ 이 만나지

않으려면 방정식

$$\frac{x+2}{x-1} = mx + 1, \quad \text{즉 } mx^2 - mx - 3 = 0$$

이 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $m=0$ 일 때

$0 \times x^2 - 0 \times x - 3 \neq 0$ 에서 실근을 갖지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m \neq 0$ 일 때

이차방정식 $mx^2 - mx - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-m)^2 - 4 \times m \times (-3) < 0$$

$$m^2 + 12m < 0, \quad m(m+12) < 0$$

$$\therefore -12 < m < 0$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$-12 < m \leq 0$$

답 $-12 < m \leq 0$

$$\begin{aligned} 1008 \quad y &= \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} \\ &= \frac{3}{x-1} + 2 \end{aligned}$$

이므로 $2 \leq x \leq 4$ 에서 $y = \frac{2x+1}{x-1}$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선

$y = kx + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항

상 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

(i) 직선 $y = kx + 1$ 이 점 $(4, 3)$ 을 지날 때

$$3 = 4k + 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $y = kx + 1$ 이 점 $(2, 5)$ 를 지날 때

$$5 = 2k + 1 \quad \therefore k = 2$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} \leq k \leq 2$$

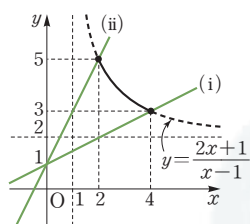
... 2단계

따라서 $M=2, m=\frac{1}{2}$ 이므로

$$M-m = \frac{3}{2}$$

... 3단계

답 $\frac{3}{2}$



... 1단계

채점 요소	비율
1단계 함수 $y = \frac{2x+1}{x-1}$ 의 그래프를 그리고, 직선 $y=kx+10$ 이 항상 지나는 점의 좌표 구하기	40 %
2단계 k 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계 $M-m$ 의 값 구하기	20 %

1009 $f^1(x)=f(x)=\frac{x-1}{x}$ 에서

momo2000@hanmail.net

$$f^2(x)=(f \circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{1-x}$$

$$f^3(x)=(f \circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=x$$

$$f^4(x)=(f \circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x)=\frac{x-1}{x}$$

⋮

즉 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{x} & (n=3k+1) \\ \frac{1}{1-x} & (n=3k+2) \\ x & (n=3k+3) \end{cases}$$

이때 $50=3 \times 16+2$ 이므로

$$f^{50}(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$\therefore f^{50}(3)=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

다른 풀이 $f(x)=\frac{x-1}{x}$ 에서

$$f^1(3)=f(3)=\frac{2}{3}$$

$$f^2(3)=(f \circ f^1)(3)=f(f^1(3))=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

$$f^3(3)=(f \circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3$$

$$f^4(3)=(f \circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(3)=\frac{2}{3}$$

⋮

따라서 $f^n(3)$ 의 값은 $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 3$ 이 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=3 \times 16+2$ 이므로

$$f^{50}(3)=-\frac{1}{2}$$

1010 $f^1(x)=f(x)=\frac{x+3}{x-1}$

$$f^2(x)=(f \circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x+3}{x-1}+3}{\frac{x+3}{x-1}-1}=x$$

$$f^3(x)=(f \circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=\frac{x+3}{x-1}$$

⋮

$$\text{즉 } f^n(x)=\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f^{1001}(x)=\frac{x+3}{x-1}$$

따라서 $f^{1001}(a)=\frac{a+3}{a-1}=2$ 에서

$$a+3=2a-2$$

$$\therefore a=5$$

답 5

1011 주어진 그래프에서 $f(6)=0, f(0)=6$ 이므로

$$f^2(6)=(f \circ f^1)(6)=f(f^1(6))=f(0)=6$$

$$f^3(6)=(f \circ f^2)(6)=f(f^2(6))=f(6)=0$$

$$f^4(6)=(f \circ f^3)(6)=f(f^3(6))=f(0)=6$$

⋮

즉 $f^n(6)$ 의 값은 0, 6이 이 순서대로 반복된다.

이때 $1000=2 \times 500$ 이므로

$$f^{1000}(6)=6$$

답 6

다른 풀이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=-2, y=-2$ 이므로

$$f(x)=\frac{a}{x+2}-2$$

로 놓으면 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(0, 6), (6, 0)$ 을 지나므로

$$6=\frac{a}{2}-2, 0=\frac{a}{8}-2 \quad \therefore a=16$$

$$\therefore f(x)=\frac{16}{x+2}-2$$

$$f^2(x)=(f \circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{16}{x+2}-2\right)$$

$$=\frac{16}{\frac{16}{x+2}-2+2}-2=x$$

$$\text{즉 } f^n(x)=\begin{cases} \frac{16}{x+2}-2 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f^{1000}(x)=x \quad \therefore f^{1000}(6)=6$$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 150~153쪽

$$\begin{aligned} \text{1012 } \frac{b}{a-1} + \frac{a}{b-1} &= \frac{b(b-1)+a(a-1)}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{a^2+b^2-a-b}{(a-1)(b-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} &= \frac{1-b+1-a}{(1-a)(1-b)} = \frac{-a-b+2}{(a-1)(b-1)} \\ \therefore \left(\frac{b}{a-1} + \frac{a}{b-1}\right) &\div \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}\right) \\ &= \frac{a^2+b^2-a-b}{(a-1)(b-1)} \div \frac{-a-b+2}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{a^2+b^2-a-b}{(a-1)(b-1)} \times \frac{(a-1)(b-1)}{-a-b+2} \\ &= \frac{a^2+b^2-a-b}{-a-b+2} = \frac{(a+b)^2-2ab-(a+b)}{-(a+b)+2} \\ &= \frac{3^2-2 \times (-4)-3}{-3+2} \\ &= -14\end{aligned}$$

답 -14

1013 주어진 등식의 우변을 통분하면

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{a_3}{(x+1)^3} + \frac{a_4}{(x+1)^4} \\ = \frac{a_1(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1) + a_4}{(x+1)^4} \\ = \frac{a_1x^3 + (3a_1+a_2)x^2 + (3a_1+2a_2+a_3)x + a_1+a_2+a_3+a_4}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

즉

$$\begin{aligned}\frac{x^3+1}{(x+1)^4} \\ = \frac{a_1x^3 + (3a_1+a_2)x^2 + (3a_1+2a_2+a_3)x + a_1+a_2+a_3+a_4}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

가 x 에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$\begin{aligned}1 &= a_1, 0 = 3a_1 + a_2, 0 = 3a_1 + 2a_2 + a_3, 1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ \therefore a_1 &= 1, a_2 = -3, a_3 = 3, a_4 = 0 \\ \therefore a_1 + a_3 &= 4\end{aligned}$$

답 4

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $(x+1)^4$ 을 곱하면

$$x^3+1 = a_1(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1) + a_4$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$-7 = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $8 = 2a_1 + 2a_3$

$$\therefore a_1 + a_3 = 4$$

$$\begin{aligned}1014 \quad \frac{3x+14}{x+5} - \frac{3x-13}{x-4} &= \frac{3(x+5)-1}{x+5} - \frac{3(x-4)-1}{x-4} \\ &= 3 - \frac{1}{x+5} - 3 + \frac{1}{x-4} \\ &= -\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-4} \\ &= \frac{-(x-4) + x+5}{(x+5)(x-4)} \\ &= \frac{9}{(x+5)(x-4)}\end{aligned}$$

$$\therefore k=9$$

답 9

1015 $f(x) = 4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \\ \therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(9)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{19} \right) = \frac{9}{19}\end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}1016 \quad \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+8}}{\frac{1}{n+8} - \frac{1}{n+16}} &= \frac{\frac{8}{n(n+8)}}{\frac{8}{(n+8)(n+16)}} \\ &= \frac{n+16}{n} \\ &= 1 + \frac{16}{n}\end{aligned}$$

이때 $1 + \frac{16}{n}$ 의 값이 자연수가 되려면 정수 n 이 16의 양의 약수이어야 한다.

따라서 정수 n 은 1, 2, 4, 8, 16이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

답 31

1017 $ab \neq 0$ 이므로 $a^2 - 5ab - b^2 = 0$ 의 양변을 ab 로 나누면

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} - 5 - \frac{b}{a} &= 0 \quad \therefore \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 5 \\ \therefore \frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3} &= \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^3 + 3 \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \\ &= 5^3 + 3 \times 5 = 140\end{aligned}$$

답 ⑤

1018 $x:y:z = 3:1:7$ 이므로

$$x=3k, y=k, z=7k \quad (k \neq 0)$$

로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{-x+4y+z}{2x+3y-z} &= \frac{-3k+4k+7k}{6k+3k-7k} \\ &= \frac{8k}{2k} = 4\end{aligned}$$

답 4

1019 $x + \frac{1}{z} = 1$ 에서 $x = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3y} + z = 1 \text{에서} \quad \frac{1}{3y} &= 1 - z \\ \therefore y &= \frac{1}{3(1-z)} \\ \therefore \frac{1}{3x} + y &= \frac{z}{3(z-1)} + \frac{1}{3(1-z)} \\ &= \frac{z-1}{3(z-1)} \\ &= \frac{1}{3} \quad (\because z \neq 1)\end{aligned}$$

답 ②

참고 $x + \frac{1}{z} = 1$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 $z \neq 1$

1020 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{3}{x+5} + 2$$

이 함수의 그래프가 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = \frac{3}{-2+5} + 2 = 3$$

답 3

$$\textbf{1021} \quad y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

$$\text{㉠. } y = \frac{2x+1}{x-2} = \frac{2(x-2)+5}{x-2} = \frac{5}{x-2} + 2$$

$$\text{㉡. } y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

이므로 $y = \frac{3x-1}{x-1}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\text{㉢. } y = \frac{2x+3}{x-2} = \frac{2(x-2)+7}{x-2} = \frac{7}{x-2} + 2$$

$$\text{㉣. } y = -\frac{2x-6}{x-2} = \frac{-2(x-2)+2}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 2$$

이므로 $y = -\frac{2x-6}{x-2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㉠, ㉡이다.

답 ㉠, ㉡

$$\textbf{1022} \quad y = \frac{ax+1}{x-3} = \frac{a(x-3)+3a+1}{x-3} = \frac{3a+1}{x-3} + a$$

이므로

정의역은 $\{x | x \neq 3 \text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y | y \neq a \text{인 실수}\}$

이때 정의역과 치역이 같으므로

$$a = 3$$

답 5

$$\textbf{1023} \quad y = \frac{x+k}{x+5} = \frac{(x+5)-5+k}{x+5} = \frac{k-5}{x+5} + 1$$

이므로 $y = \frac{x+k}{x+5}$ 의 그래프는 $y = \frac{k-5}{x+5}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 정의역이

$\{x | -3 \leq x \leq -1\}$, 공역이

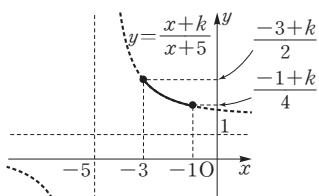
$\{y | 2 \leq y \leq 5\}$ 일 때, 함수가

정의되려면 그래프가 오른쪽

그림과 같아야 하므로

$$k-5 > 0$$

$$\therefore k > 5$$



따라서 치역이 $\left\{y \mid \frac{-1+k}{4} \leq y \leq \frac{-3+k}{2}\right\}$ 이므로

$$\frac{-1+k}{4} \geq 2, \quad \frac{-3+k}{2} \leq 5$$

$$\therefore 9 \leq k \leq 13$$

답 9 ≤ k ≤ 13

참고 $k=50$ 이면 $y=1$

$k < 50$ 이면 $y < 1$

따라서 $2 \leq y \leq 5$ 를 만족시키지 않으므로 함수가 정의되지 않는다.

$$\textbf{1024} \quad y = \frac{k}{x-1} + 5 \text{의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$$x=1, y=5$$

이때 두 점근선의 교점의 좌표가 $(1, 2a+1)$ 이므로

$$2a+1=5 \quad \therefore a=2$$

따라서 함수 $y = \frac{k}{x-1} + 5$ 의 그래프가 점 $(5, 3a)$, 즉 $(5, 6)$ 을 지나므로

$$6 = \frac{k}{4} + 5 \quad \therefore k=4$$

답 4

$$\textbf{1025} \quad y = \frac{3}{x-1} + 2 \text{의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$$x=1, y=2$$

따라서 점 Q는 직선 $y=2$, 점 R는 직선 $x=1$ 위의 점이므로

점 P의 좌표를 $\left(a, \frac{3}{a-1} + 2\right)$ ($a > 1$)라 하면

$$Q(a, 2), R\left(1, \frac{3}{a-1} + 2\right)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{3}{a-1} + 2 - 2 = \frac{3}{a-1}, \quad \overline{PR} = a - 1$$

이때 $a > 1$ 에서 $a-1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ} + \overline{PR} = \frac{3}{a-1} + a - 1$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3}{a-1} \times (a-1)}$$

$$= 2\sqrt{3} \left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{a-1} = a-1 \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{PR}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

답 3

$$\textbf{1026} \quad y = \frac{3x-1}{x+k} = \frac{3(x+k)-3k-1}{x+k} = \frac{-3k-1}{x+k} + 3$$

의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{-3k-1}{x-1+k} + 3 - 2 = \frac{-3k-1}{x-1+k} + 1$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=1-k, y=1$$

따라서 점 $(1-k, 1)$ 이 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$$1 = 3(1-k), \quad 1 = 3-3k$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

답 2/3

다른 풀이 $y = \frac{3x-1}{x+k} = \frac{3(x+k)-3k-1}{x+k} = \frac{-3k-1}{x+k} + 3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x = -k, y = 3$

따라서 $y = \frac{3x-1}{x+k}$ 의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는

$(-k, 3)$ 이다.

점 $(-k, 3)$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-k+1, 3-2), \text{ 즉 } (-k+1, 1)$$

이 점이 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$$1=3(-k+1) \quad \therefore k=\frac{2}{3}$$

1027 $y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c} = \frac{-ac+b}{x+c} + a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -c, y = a$$

즉 두 직선 $y=x+2, y=-x+4$ 가 두 점근선의 교점 $(-c, a)$ 를 지나므로

$$a = -c+2, a = c+4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, c=-1$

따라서 $y = \frac{3x+b}{x-1}$ 의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{-3+b}{-2}, \quad -4 = -3+b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a+b-c=3$$

답 3

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+2, y=-x+4$ 의 교점인 점 $(1, 3)$ 에 대하여 대칭이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-1} + 3 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 $\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{-2} + 3 \quad \therefore k = 2$$

$k=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = \frac{2}{x-1} + 3 = \frac{2+3(x-1)}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1}$$

따라서 $a=3, b=-1, c=-1$ 이므로

$$a+b-c=3$$

1028 $y = \frac{2}{x-k} - 4$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프가 제1사분면을 지나지 않으

려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$k < 0$$

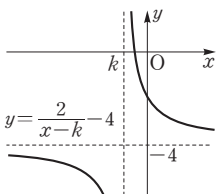
또 $x=0$ 일 때 y 의 값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$$-\frac{2}{k} - 4 \leq 0, \quad -4 \leq \frac{2}{k}$$

양변에 k 를 곱하면

$$-4k \geq 2 \quad (\because k < 0) \quad \therefore k \leq -\frac{1}{2}$$

답 $k \leq -\frac{1}{2}$



참고 $k \geq 0$ 이면 $y = \frac{2}{x-k} - 4$ 의 그래프는 반드시 제1사분면을 지난다.

1029 $y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c} = \frac{-ac+b}{x+c} + a$

이때 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1, y=-2$ 이므로 $a=-2, c=1$

또 $y = \frac{-ac+b}{x}$ 의 그래프가 제2사분면과 제4사분면을 지나므로

$$-ac+b < 0$$

$$2+b < 0 \quad \therefore b < -2$$

ㄱ. $a=-2, c=1$ 이므로 $a+c=-1$ (참)

ㄴ. $a=-2, b < -2, c=1$ 이므로 $abc > 0$ (참)

ㄷ. [반례] $b=-3$ 이면

$$a^2+b=4-3=1 > 0 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

1030 ④ $|k|$ 의 값이 클수록 그래프는 원점으로부터 멀어진다. 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

1031 $y = \frac{3x+k}{x+2} = \frac{3(x+2)-6+k}{x+2} = \frac{-6+k}{x+2} + 3$

(i) $-6+k < 0$, 즉 $k < 6$ 일 때

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = \frac{3x+k}{x+2}$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로

$$y < 3$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-6+k > 0$, 즉 $k > 6$ 일 때

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = \frac{3x+k}{x+2}$ 의 그래프

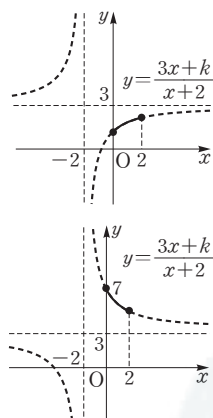
는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=0$ 일 때 최댓값 7을 가지므로

$$\frac{k}{2} = 7 \quad \therefore k = 14$$

(i), (ii)에서 $k=14$

답 14



1032 $f^{-1}(1)=2$ 에서 $f(2)=1$ 이므로

$$\frac{6+2}{-6+a} = 1, \quad 8 = -6+a$$

$$\therefore a = 14$$

$$\text{즉 } f(x) = \frac{3x+2}{-3x+14} = \frac{-(3x-14)-16}{3x-14} = -\frac{16}{3x-14} - 1$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{14}{3}, y = -1$$

$$\text{또 } g(x) = \frac{bx+3}{x+c} = \frac{b(x+c)-bc+3}{x+c} = \frac{-bc+3}{x+c} + b \text{이므로}$$

$y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -c, y = b$$

두 그래프의 점근선이 일치하므로

$$\frac{14}{3} = -c, -1 = b \quad \therefore b = -1, c = -\frac{14}{3}$$

$$\therefore a + b + c = \frac{25}{3}$$

답 ③

1033 $(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이다.

이때 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x) = \frac{2x+6}{x+1} = \frac{2(x+1)+4}{x+1}$$

$$= \frac{4}{x+1} + 2$$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수

$y = g(x)$ 의 그래프는 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$\text{즉 } \frac{2x+6}{x+1} = x \text{에서 } 2x+6 = x(x+1)$$

$$x^2 - x - 6 = 0, \quad (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값은 $-2, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-2 + 3 = 1$$

답 ③

다른 풀이 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2g(x)+6}{g(x)+1}$

$$\text{즉 } \frac{2g(x)+6}{g(x)+1} = x \text{이므로}$$

$$2g(x) + 6 = xg(x) + x$$

$$(x-2)g(x) = -x+6 \quad \therefore g(x) = \frac{-x+6}{x-2}$$

따라서 $f(x) = g(x)$ 에서 $\frac{2x+6}{x+1} = \frac{-x+6}{x-2}$

$$(2x+6)(x-2) = (-x+6)(x+1)$$

$$3x^2 - 3x - 18 = 0, \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

1034 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(4)$

$$= (g^{-1} \circ f)(4)$$

$$= g^{-1}(f(4))$$

$$= g^{-1}(2) \leftarrow f(4) = \frac{4-2}{4-3} = 2$$

$g^{-1}(2) = k$ 라 하면 $g(k) = 2$ 이므로

$$\frac{-2k+2}{k-3} = 2, \quad -2k+2 = 2k-6$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(2) = 2$$

답 2

1035 $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 함수 $y = \frac{2x-1}{x}$ 의 그래프와 직선

$y = ax+1$ 이 만난다.

따라서 방정식

$$\frac{2x-1}{x} = ax+1, \text{ 즉 } ax^2 - x + 1 = 0$$

이 실근을 가져야 한다.

(i) $a = 0$ 일 때

$$0 \times x^2 - x + 1 = 0 \text{에서 } x = 1$$

따라서 실근을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

이차방정식 $ax^2 - x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \times a \times 1 \geq 0, \quad -4a \geq -1$$

$$\therefore a \leq \frac{1}{4}$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a < 0$ 또는 $0 < a \leq \frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$a \leq \frac{1}{4}$$

답 $a \leq \frac{1}{4}$

1036 $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$

이므로

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 0, \quad \frac{a+b+c}{abc} = 0$$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= 0$$

즉 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 이므로

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

... 1단계

... 2단계

... 3단계

답 3

	채점 요소	비율
1단계	$a+b+c=0$ 임을 알기	40 %
2단계	$a^3+b^3+c^3=3abc$ 임을 알기	50 %
3단계	$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ 의 값 구하기	10 %

1037 $y = \frac{-2x-1}{x-a} = \frac{-2(x-a)-2a-1}{x-a}$

$$= \frac{-2a-1}{x-a} - 2$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = a, y = -2$$

... 1단계

$$y = \frac{2ax-2}{x+3} = \frac{2a(x+3)-6a-2}{x+3}$$

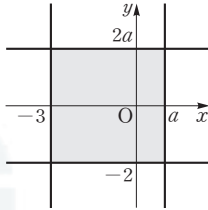
$$= \frac{-6a-2}{x+3} + 2a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -3, y = 2a$$

... 2단계

이때 $a > 0$ 이므로 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 도형의 넓이가 16이므로



$$(a+3)(2a+2)=16$$

$$2a^2+8a+6=16$$

$$a^2+4a-5=0$$

$$(a+5)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0) \quad \cdots \text{3단계}$$

답 1

채점 요소	비율
1단계 함수 $y = \frac{-2x-1}{x-a}$ 의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	30 %
2단계 함수 $y = \frac{2ax-2}{x+3}$ 의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	30 %
3단계 a 의 값 구하기	40 %

1038 $f(x) = \frac{3x+a}{x+b}$ 의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{3+a}{1+b}, \quad 1+b=3+a$$

$$\therefore a-b=-2 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0 \text{에서 } f(0)=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \quad \therefore b=2a \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a=2, b=4 \quad \cdots \text{1단계}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3x+2}{x+4} \text{이고, } b-a=2 \text{이므로}$$

$$f^{-1}(b-a)=f^{-1}(2)=k \text{라 하면}$$

$$f(k)=2, \quad \frac{3k+2}{k+4}=2$$

$$3k+2=2k+8 \quad \therefore k=6$$

$$\therefore f^{-1}(b-a)=f^{-1}(2)=6 \quad \cdots \text{2단계}$$

답 6

채점 요소	비율
1단계 a, b 의 값 구하기	50 %
2단계 $f^{-1}(b-a)$ 의 값 구하기	50 %

1039 $f(x) = \frac{x}{1-x}$ 에서

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x) = \frac{x}{1-nx} \quad \cdots \text{1단계}$$

$$\text{따라서 } f^{100}(x) = \frac{x}{1-100x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f^{100}\left(\frac{1}{20}\right) &= \frac{\frac{1}{20}}{1-100 \times \frac{1}{20}} \\ &= -\frac{1}{80} \end{aligned}$$

$\cdots$ 2단계

답 $-\frac{1}{80}$

채점 요소	비율
1단계 $f^n(x)$ 구하기	70 %
2단계 $f^{100}\left(\frac{1}{20}\right)$ 의 값 구하기	30 %

1040 **전략** 연산 $\triangle$ 의 정의를 이용하여 $f(n)$ 을 구한다.

집합 $A_n \triangle B_n$ 의 원소의 최솟값은 집합 A_n 의 원소 n^2+2n 과 B_n 의 원소 $2n^2$ 중 작은 값이다.

$$n^2+2n-2n^2 = -n^2+2n = -n(n-2)$$

에서 $n > 2$ 이면 $-n(n-2) < 0$ 이므로

$$n^2+2n < 2n^2$$

즉 $n > 2$ 에서 $f(n) = n^2+2n$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(n)} &= \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{f(4)} + \frac{1}{f(5)} + \cdots + \frac{1}{f(10)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{9}{44} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{44}$

1041 **전략** $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 의 길이를 점 A의 x 좌표에 대한 식으로 나타낸다.

점 A의 좌표를 $\left(p, \frac{3}{p}\right)$ ($p > 0$)이라 하면 점 B의 y 좌표는 $\frac{3}{p}$ 이

므로 $\frac{k}{x} = \frac{3}{p}$ 에서

$$x = \frac{kp}{3} \quad \therefore B\left(\frac{kp}{3}, \frac{3}{p}\right)$$

또 점 C의 x 좌표는 p 이므로 $C\left(p, \frac{k}{p}\right)$

$$\therefore \overline{AB} = \left| \frac{kp}{3} - p \right| = \left| \frac{(k-3)p}{3} \right|,$$

$$\overline{AC} = \left| \frac{k}{p} - \frac{3}{p} \right| = \left| \frac{k-3}{p} \right|$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = 24$$

$$\frac{1}{2} \times \left| \frac{(k-3)p}{3} \right| \times \left| \frac{k-3}{p} \right| = 24$$

$$\frac{|k-3|^2}{6} = 24, \quad |k-3|^2 = 144$$

$$k-3 = \pm 12$$

$$\therefore k = 15 \quad (\because k > 0)$$

답 15

1042 전략 $a < 0, a = 0, a > 0$ 인 경우로 나누어 $y = \frac{1}{x} - a$,

$y = -\frac{1}{x+1} + a$ 의 그래프를 그려 본다.

$y = \frac{1}{x} - a$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이고, $y = -\frac{1}{x+1} + a$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

(i) $a < 0$ 일 때

$y = \frac{1}{x} - a$ 의 그래프와

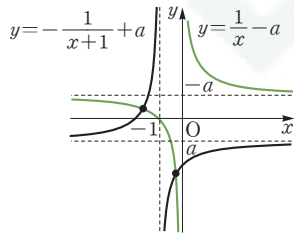
$y = -\frac{1}{x+1} + a$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

이때 x 좌표가 음수인 교점의

개수는 2이므로

$$h(a) = 2$$



(ii) $a = 0$ 일 때

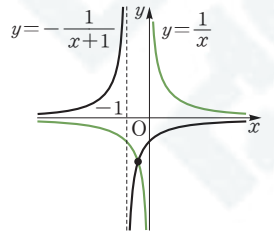
$y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와

$y = -\frac{1}{x+1}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

이때 x 좌표가 음수인 교점의 개

수는 1이므로 $h(a) = 1$



(iii) $a > 0$ 일 때

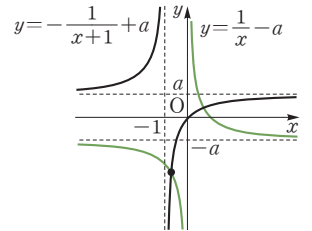
$y = \frac{1}{x} - a$ 의 그래프와

$y = -\frac{1}{x+1} + a$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

이때 x 좌표가 음수인 교점의

개수는 1이므로 $h(a) = 1$



이상에서 $h(a) = \begin{cases} 2 & (a < 0) \\ 1 & (a \geq 0) \end{cases}$

따라서 연속하는 세 정수 $a, a+1, a+2$ 에 대하여

$h(a) + h(a+1) + h(a+2) = 5$ 가 성립하려면

$$h(a) = 2, h(a+1) = 2, h(a+2) = 1$$

momo2000@hanmail.net

이어야 하므로

$$a+2=0 \quad \therefore a=-2$$

답 -2

10 무리함수

교과서 문제 정복하기

• 본책 155쪽

1043 $3-x \geq 0$ 이므로 $x \leq 3$ 답 $x \leq 3$

1044 $2x+8 \geq 0, 1-x \geq 0$ 이므로
 $-4 \leq x \leq 1$ 답 $-4 \leq x \leq 1$

1045 $x-2 \geq 0, 6-x > 0$ 이므로
 $2 \leq x < 6$ 답 $2 \leq x < 6$

1046
$$\frac{3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}} = \frac{3(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{x+3-x}$$

$$= \sqrt{x+3}+\sqrt{x}$$
 답 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$

RPM비법노트

분모의 유리화

$a > 0, b > 0$ 일 때

① $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

② $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$
 $= \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a \neq b$)

1047
$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{x+1-(x+3)}$$

$$= \sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$$
 답 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$

1048
$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)^2}{(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+4}-2)}$$

$$= \frac{x+4-4\sqrt{x+4}+4}{x+4-4}$$

$$= \frac{x+8-4\sqrt{x+4}}{x}$$
 답 $\frac{x+8-4\sqrt{x+4}}{x}$

1049 $\neg$. $y = \sqrt{5x}$ 는 다항함수이다.
 $\therefore y = \sqrt{(x+3)^2}$, 즉 $y = |x+3|$ 은 무리함수가 아니다.
 이상에서 무리함수인 것은 $\neg, \text{ㄹ}$ 이다. 답 $\neg, \text{ㄹ}$

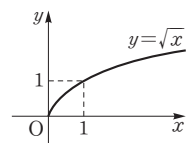
1050 $x-2 \geq 0$ 에서 $x \geq 2$
 따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | x \geq 2\}$ 답 $\{x | x \geq 2\}$

1051 $-2x+6 \geq 0$ 에서 $x \leq 3$
 따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | x \leq 3\}$ 답 $\{x | x \leq 3\}$

1052 $2x-3 \geq 0$ 에서 $x \geq \frac{3}{2}$
 따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | x \geq \frac{3}{2}\}$ 답 $\{x | x \geq \frac{3}{2}\}$

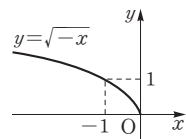
1053 $1-x \geq 0$ 에서 $x \leq 1$
 따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | x \leq 1\}$ 답 $\{x | x \leq 1\}$

1054 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$,
 치역은 $\{y | y \geq 0\}$
 이다.



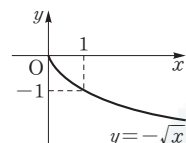
답 풀이 참조

1055 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
 정의역은 $\{x | x \leq 0\}$,
 치역은 $\{y | y \geq 0\}$
 이다.



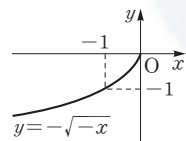
답 풀이 참조

1056 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$,
 치역은 $\{y | y \leq 0\}$
 이다.



답 풀이 참조

1057 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
 정의역은 $\{x | x \leq 0\}$,
 치역은 $\{y | y \leq 0\}$
 이다.



답 풀이 참조

1058 (1) $y = \sqrt{5x}$ 에 y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$-y = \sqrt{5x} \quad \therefore y = -\sqrt{5x}$$

(2) $y = \sqrt{5x}$ 에 x 대신 $-x$ 를 대입하면

$$y = \sqrt{-5x}$$

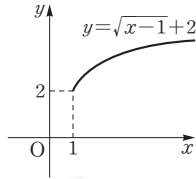
(3) $y = \sqrt{5x}$ 에 x 대신 $-x, y$ 대신 $-y$ 를 대입하면

$$-y = \sqrt{-5x} \quad \therefore y = -\sqrt{-5x}$$

답 (1) $y = -\sqrt{5x}$ (2) $y = \sqrt{-5x}$ (3) $y = -\sqrt{-5x}$

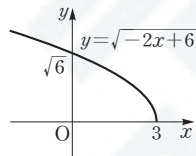
1059 $y = \sqrt{3(x+3)} + 2$

1060 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x | x \geq 1\}$,
치역은 $\{y | y \geq 2\}$
이다.



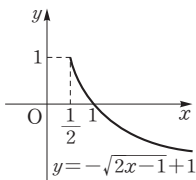
답 풀이 참조

1061 $y = \sqrt{-2x+6} = \sqrt{-2(x-3)}$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x | x \leq 3\}$,
치역은 $\{y | y \geq 0\}$
이다.



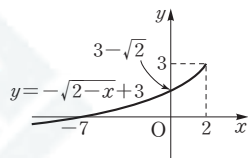
답 풀이 참조

1062 $y = -\sqrt{2x-1} + 1 = -\sqrt{2(x-\frac{1}{2})} + 1$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x | x \geq \frac{1}{2}\}$,
치역은 $\{y | y \leq 1\}$
이다.



답 풀이 참조

1063 $y = -\sqrt{2-x} + 3 = -\sqrt{-(x-2)} + 3$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x | x \leq 2\}$,
치역은 $\{y | y \leq 3\}$
이다.



답 풀이 참조

유형 익히기

• 본책 156~162쪽

1064 $6x^2 - 7x - 5 \geq 0$ 이므로
 $(2x+1)(3x-5) \geq 0$
 $\therefore x \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $x \geq \frac{5}{3}$

답 $x \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $x \geq \frac{5}{3}$

1065 $7-2x \geq 0$ 이므로 $x \leq \frac{7}{2}$

..... ㉠

$x+1 > 0$ 이므로 $x > -1$

..... ㉡

㉠, ㉡에서

$-1 < x \leq \frac{7}{2}$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 ③

1066 $2x+1 \geq 0$ 이므로 $x \geq -\frac{1}{2}$

..... ㉠

$1-4x \geq 0$ 이므로 $x \leq \frac{1}{4}$

..... ㉡

㉠, ㉡에서

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$ 일 때, $x-1 < 0$ 이므로

$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2}$
 $= -(x-1) = -x+1$

답 ②

1067 $x+2 \geq 0$ 이므로 $x \geq -2$

..... ㉠

$8-3x \geq 0$ 이므로 $x \leq \frac{8}{3}$

..... ㉡

$x^2+4x+4 \neq 0$ 이므로 $(x+2)^2 \neq 0$

$\therefore x \neq -2$

..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-2 < x \leq \frac{8}{3}$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2=2$

답 2

1068 $\frac{x}{2+\sqrt{x+1}} + \frac{x}{2-\sqrt{x+1}}$
 $= \frac{x(2-\sqrt{x+1}) + x(2+\sqrt{x+1})}{(2+\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x+1})}$
 $= \frac{2x - x\sqrt{x+1} + 2x + x\sqrt{x+1}}{4 - (x+1)}$
 $= \frac{4x}{3-x}$

답 ④

1069 $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$
 $= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$
 $= \frac{1}{x+1-(x-1)}$
 $\times (x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1)$
 $+ x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1)$
 $= \frac{4x}{2} = 2x$

답 $2x$

$$\begin{aligned}
 1070 \quad & \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{2(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{2(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{x+2-x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} - (\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{x+2}} \\
 &= -\frac{\sqrt{x+2}}{x+2}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 1071 \quad & \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} \\
 &= \frac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})} \\
 &= \frac{2x+1 - 2\sqrt{2x+1}\sqrt{2x-1} + 2x-1}{2x+1 - (2x-1)} \\
 &= \frac{4x - 2\sqrt{4x^2-1}}{2} \\
 &= 2x - \sqrt{4x^2-1} \\
 & \quad x = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{을 대입하면}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x - \sqrt{4x^2-1} &= 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} - \sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 1} \\
 &= \sqrt{7} - \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

답 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$

$$\begin{aligned}
 1072 \quad & \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{2}{1-x} \\
 & \quad x = \sqrt{3} \text{을 대입하면} \\
 & \quad \frac{2}{1-x} = \frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \\
 & \quad = \frac{2(1+\sqrt{3})}{-2} = -1-\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 1073 \quad & \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1} \\
 &= \frac{2x+2}{x-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 \text{을 대입하면} \\
 \frac{2x+2}{x-1} &= \frac{2(\sqrt{2}+1)+2}{(\sqrt{2}+1)-1} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}} = 2+2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 1074 \quad & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{x+2 - (x+1)} \\
 &= \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}
 \end{aligned}$$

... 1단계

$$\begin{aligned}
 \therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30) \\
 &= (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + \cdots \\
 & \quad + (\sqrt{32}-\sqrt{31}) \\
 &= -\sqrt{2} + \sqrt{32} = -\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\
 &= 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

... 2단계

답 $3\sqrt{2}$

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 를 간단히 하기	60%
2단계 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$ 의 값 구하기	40%

$$1075 \quad \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때 } x+y &= (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}, \\
 xy &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 1076 \quad & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\
 &= \frac{x - \sqrt{xy} - \sqrt{xy} - y}{x-y} = \frac{x-y-2\sqrt{xy}}{x-y}
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2+\sqrt{3},$$

$$y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2-\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$x-y = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3},$$

$$xy = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{2\sqrt{3}-2 \times 1}{2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 1077 \quad & (\sqrt{2x} - \sqrt{2y})^2 = 2x - 2\sqrt{4xy} + 2y \\
 &= 2(x+y) - 4\sqrt{xy}
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x+y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3,$$

$$xy = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 \text{이므로}$$

$$(\sqrt{2x} - \sqrt{2y})^2 = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2$$

한편 $x > y$ 에서 $\sqrt{2x} > \sqrt{2y}$ 이므로 $\sqrt{2x} - \sqrt{2y} > 0$
 $\therefore \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = \sqrt{2}$ **답** $\sqrt{2}$

1078 $y = \sqrt{1-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{1-3(x-2)} + 3 = \sqrt{-3x+7} + 3$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sqrt{-3x+7} + 3 \quad \therefore y = -\sqrt{-3x+7} - 3$$

이 함수의 그래프가 $y = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프와 일치하므로

$$a = -3, b = 7, c = -3$$

$$\therefore a+b+c = 1$$

답 1

1079 $y = \sqrt{2x+6} - 1 = \sqrt{2(x+3)} - 1$

따라서 $y = \sqrt{2x+6} - 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$$a = 2, b = -3, c = -1$$

$$\therefore a+b+c = -2$$

답 -2

다른 풀이 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-b)} + c = \sqrt{ax-ab} + c$$

이 함수의 그래프가 $y = \sqrt{2x+6} - 1$ 의 그래프와 일치하므로

$$a = 2, -ab = 6, c = -1 \quad \therefore a = 2, b = -3, c = -1$$

1080 ㄱ. $y = \sqrt{-5x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = \sqrt{5x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\text{ㄴ. } y = -\sqrt{-5x+2} = -\sqrt{-5\left(x-\frac{2}{5}\right)}$$

이므로 $y = -\sqrt{-5x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{2}{5}$ 만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동하면 $y = \sqrt{5x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y = \sqrt{5x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ㄱ, ㄴ

1081 $y = \sqrt{-2x+8} + 5 = \sqrt{-2(x-4)} + 5$

이므로 $y = \sqrt{-2x+8} + 5$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4 \leq x \leq 2$ 에서

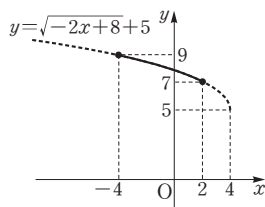
$y = \sqrt{-2x+8} + 5$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$x = -4 \text{ 일 때 } y = 9$$

$$x = 2 \text{ 일 때 } y = 7$$

즉 구하는 치역은

$$\{y \mid 7 \leq y \leq 9\}$$



답 ③

1082 $y = \sqrt{4x+b} + 2$ 의 그래프가 점 (2, 4)를 지나므로

$$4 = \sqrt{8+b} + 2, \quad -\sqrt{8+b} = -2$$

$$8+b = 4 \quad \therefore b = -4$$

$$\therefore y = \sqrt{4x-4} + 2$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x \mid x \geq 1\}$ 이므로

$$a = 1$$

$$\therefore a+b = -3$$

답 -3

1083 $y = -\sqrt{6x-3} - 4 = -\sqrt{6\left(x-\frac{1}{2}\right)} - 4$

이므로 $y = -\sqrt{6x-3} - 4$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{6x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-10 \leq y \leq -6$ 에서

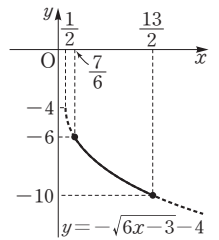
$y = -\sqrt{6x-3} - 4$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$$y = -10 \text{ 일 때 } x = \frac{13}{2}$$

$$y = -6 \text{ 일 때 } x = \frac{7}{6}$$

즉 정의역은 $\left\{x \mid \frac{7}{6} \leq x \leq \frac{13}{2}\right\}$ 이므로 정의역에 속하는 정수는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. **답** 5



1084 $y = \frac{3x-2}{x+1} = \frac{3(x+1)-5}{x+1} = -\frac{5}{x+1} + 3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -1, y = 3$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

즉 $y = \sqrt{-x+3} + c$ 의 그래프가 $y = \frac{3x-2}{x+1}$ 의 그래프의 두 점근선의 교점 (-1, 3)을 지나므로

$$3 = \sqrt{-(-1)+3} + c, \quad 3 = 2 + c$$

$$\therefore c = 1$$

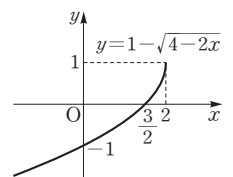
따라서 함수 $y = \sqrt{-x+3} + 1$ 의 정의역은 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$ 이다.

답 정의역: $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 1\}$

1085 $y = 1 - \sqrt{4-2x} = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$

이므로 $y = 1 - \sqrt{4-2x}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

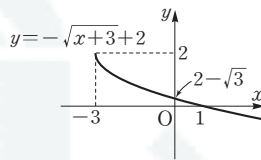
따라서 $y = 1 - \sqrt{4-2x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4사분면을 지난다.



답 ④

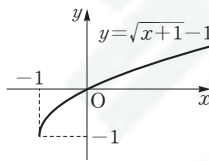
1086 ① $y = -\sqrt{x+3} + 2$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = -\sqrt{x+3} + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



② $y = \sqrt{x+1} - 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

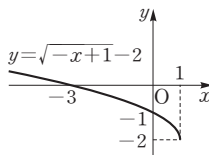
따라서 $y = \sqrt{x+1} - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3 사분면을 지난다.



③ $y = \sqrt{-x+1} - 2 = \sqrt{-(x-1)} - 2$

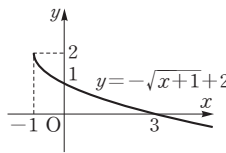
이므로 $y = \sqrt{-x+1} - 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \sqrt{-x+1} - 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



④ $y = -\sqrt{x+1} + 2$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

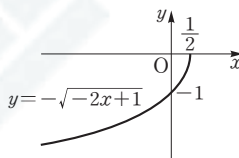
따라서 $y = -\sqrt{x+1} + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



⑤ $y = -\sqrt{-2x+1} = -\sqrt{-2(x-\frac{1}{2})}$

이므로 $y = -\sqrt{-2x+1}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = -\sqrt{-2x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 3, 4 사분면을 지난다.



따라서 그래프가 제 4 사분면을 지나지 않는 것은 ②이다.

답 ②

1087 $y = \sqrt{-x+4}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-x+4} + a$$

... 1단계

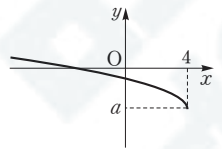
$y = \sqrt{-x+4} + a = \sqrt{-(x-4)} + a$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y = \sqrt{-x+4} + a$ 의 그래프가 제 2, 3, 4 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 일 때 $y < 0$ 이어야 하므로

$$\sqrt{4} + a < 0$$

$$\therefore a < -2$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -3 이다.



... 2단계

... 3단계

답 -3

	채점 요소	비율
1단계	평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
2단계	a 의 값의 범위 구하기	50 %
3단계	정수 a 의 최댓값 구하기	20 %

1088 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = \sqrt{a(x+2)} - 1$$

..... ①

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \sqrt{2a} - 1, \quad -\sqrt{2a} = -2, \quad 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

$a = 2$ 를 ①에 대입하면

$$y = \sqrt{2(x+2)} - 1 = \sqrt{2x+4} - 1$$

따라서 $a = 2, b = 4, c = -1$ 이므로

$$abc = -8$$

답 -8

1089 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = -\sqrt{a(x-1)} + 2$$

..... ①

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\sqrt{a(-2-1)} + 2, \quad \sqrt{-3a} = 2$$

$$-3a = 4 \quad \therefore a = -\frac{4}{3}$$

$a = -\frac{4}{3}$ 를 ①에 대입하면

$$y = -\sqrt{-\frac{4}{3}(x-1)} + 2 = -\sqrt{-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}} + 2$$

따라서 $a = -\frac{4}{3}, b = \frac{4}{3}, c = 2$ 이므로

$$a + b + c = 2$$

답 ⑤

1090 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = \sqrt{a(x-p)} + q = \sqrt{ax - ap} + q$$

로 놓을 수 있다.

이 함수가 $y=\sqrt{ax-b}+c$ 와 같으므로

$$b=ap, c=q$$

ㄱ. 주어진 그래프에서 $p>0$ 이므로

$$ap<0 \quad \therefore b<0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 주어진 그래프에서 $q<0$ 이므로

$$c<0 \quad \therefore ac>0 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $x=0$ 에서의 함숫값이 0보다 크므로

$$\sqrt{-b}+c>0 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른 풀이 $y=\sqrt{ax-b}+c=\sqrt{a\left(x-\frac{b}{a}\right)}+c$ 이므로

$$p=\frac{b}{a}, q=c$$

주어진 그래프에서 $p>0, q<0$ 이므로

$$a<0, b<0, c<0$$

1091 ① $y=\sqrt{2x+6}-3$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0=\sqrt{2x+6}-3, \quad -\sqrt{2x+6}=-3$$

$$2x+6=9 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$$

따라서 그래프는 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

② $2x+6 \geq 0$ 에서 $x \geq -3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \geq -3\}$ 이다.

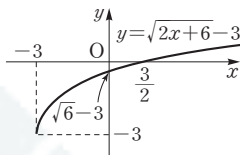
③ $\sqrt{2x+6} \geq 0$ 에서 $\sqrt{2x+6}-3 \geq -3$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y \geq -3\}$ 이다.

④ $y=\sqrt{2x+6}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

이므로 $y=\sqrt{2x+6}-3$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\sqrt{2x+6}-3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2 사분면을 지나지 않는다.



따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

1092 ㄱ. $x+b \geq 0$ 에서 $x \geq -b$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \geq -b\}$ 이다.

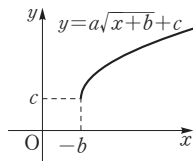
또 $a<0$ 이면 $a\sqrt{x+b} \leq 0$ 이므로 $a\sqrt{x+b}+c \leq c$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y \leq c\}$ 이다. (참)

ㄴ. $y=a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는 $y=a\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. (참)

ㄷ. $a>0, b<0, c>0$ 이면

$y=a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2 사분면을 지나지 않는다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

1093 $y=\sqrt{x+1}-1$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3 \leq x \leq 8$ 에서 $y=\sqrt{x+1}-1$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=8$ 일 때 최댓값 2,

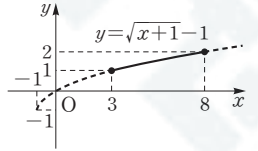
$x=3$ 일 때 최솟값 1

을 갖는다.

즉 $M=2, m=1$ 이므로

$$M+m=3$$

답 ③



1094 $y=-\sqrt{4x+5}+a=-\sqrt{4\left(x+\frac{5}{4}\right)}+a$

이므로 $y=-\sqrt{4x+5}+a$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{5}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x \geq 1$ 에서 $y=-\sqrt{4x+5}+a$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 $x=1$ 일 때 최댓값 -4 를 가지므로

$$-3+a=-4 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $y=-\sqrt{4x+5}-1$ 의 그래프가 점

$(b, -6)$ 을 지나므로

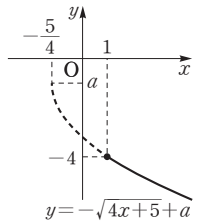
$$-6=-\sqrt{4b+5}-1$$

$$\sqrt{4b+5}=5, \quad 4b+5=25$$

$$\therefore b=5$$

$$\therefore ab=-5$$

답 -5



1095 $y=\sqrt{a-x}-1=\sqrt{-(x-a)}-1$

이므로 $y=\sqrt{a-x}-1$ 의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3 \leq x \leq 2$ 에서

$y=\sqrt{a-x}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 $x=-3$ 일 때 최댓값 2를 가지므로

$$\sqrt{a+3}-1=2, \quad \sqrt{a+3}=3$$

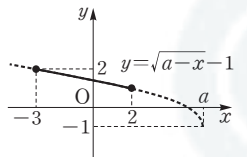
$$a+3=9 \quad \therefore a=6$$

따라서 $y=\sqrt{6-x}-1$ 은 $x=2$ 일 때 최솟값

$$\sqrt{6-2}-1=1$$

을 갖는다.

답 1



1096 $y=-\sqrt{-3x-2}+2=-\sqrt{-3\left(x+\frac{2}{3}\right)}+2$

이므로 $y=-\sqrt{-3x-2}+2$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p \leq x \leq -2$ 에서

$y = -\sqrt{-3x-2}+2$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 0을 가지므로
 $q = 0$

$x = p$ 일 때 최솟값 -2 를 가지므로

$$-\sqrt{-3p-2}+2 = -2, \quad -\sqrt{-3p-2} = -4$$

$$-3p-2 = 16 \quad \therefore p = -6$$

$$\therefore p - q = -6$$

답 -6

1097 함수 $y = 3 - \sqrt{4x+2}$ 의 치역이 $\{y | y \leq 3\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \leq 3\}$ 이다.

$$y = 3 - \sqrt{4x+2} \text{에서} \quad y - 3 = -\sqrt{4x+2}$$

$$\text{양변을 제곱하면} \quad (y-3)^2 = 4x+2$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}(y-3)^2 - \frac{1}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{4}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \quad (x \leq 3)$$

따라서 $a = \frac{1}{4}$, $b = -3$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = 3$ 이므로

$$abcd = \frac{9}{8}$$

답 $\frac{9}{8}$

1098 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \sqrt{a+b} \quad \therefore a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$f^{-1}(1) = 2 \quad \therefore f(2) = 1$$

즉 $\sqrt{2a+b} = 1$ 이므로

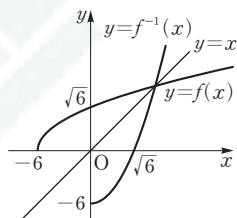
$$2a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = 7$

$$\therefore a - b = -10$$

답 -10

1099 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



... 1단계

$\sqrt{x+6} = x$ 의 양변을 제곱하면 $x+6 = x^2$

$$x^2 - x - 6 = 0, \quad (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad (\because x \geq 0)$$

... 2단계

따라서 교점의 좌표가 $(3, 3)$ 이므로

$$a = 3, b = 3$$

$$\therefore a + b = 6$$

... 3단계

답 6

채점 요소

비율

1단계 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점이
 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점임을 알기

30 %

2단계 교점의 x 좌표 구하기

50 %

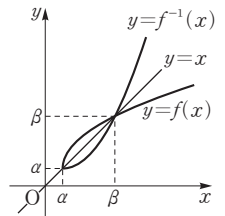
3단계 $a+b$ 의 값 구하기

20 %

참고 함수 $f(x) = \sqrt{x+6}$ 의 치역이 $\{y | y \geq 0\}$ 이므로 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$ 이다.

따라서 두 그래프의 교점의 x 좌표는 0 이상이다.

1100 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{3x+a}+1 = x \text{에서} \quad \sqrt{3x+a} = x-1$$

$$\text{양변을 제곱하면} \quad 3x+a = x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore x^2 - 5x + 1 - a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 이차방정식의 두 근을 α , β ($\alpha < \beta$)라 하면 두 교점의 좌표는 (α, α) , (β, β) 이고 두 교점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 이차방정식 $\textcircled{1}$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 1 - a$$

$\textcircled{2}$ 에서 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9$ 이므로

$$5^2 - 4(1 - a) = 9, \quad 4a = -12$$

$$\therefore a = -3$$

답 ①

1101 $(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(3) = f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3) = k$ 라 하면 $f(k) = 3$ 이므로

$$\sqrt{2k-3} = 3, \quad 2k-3 = 9$$

$$\therefore k = 6$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(3) = f^{-1}(3) = 6$$

답 ⑤

1102 $(f \circ g)(x) = x$ 에서 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$(g \circ g \circ f)(2) = g(2)$$

$g(2) = k$ 라 하면 $f(k) = 2$ 이므로

$$\sqrt{4k+1} = 2, \quad 4k+1 = 4$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore (g \circ g \circ f)(2) = g(2) = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

1103 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(3)$

$$= (g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(3)$$

$$= (f^{-1} \circ g)(3)$$

$$= f^{-1}(g(3))$$

$$= f^{-1}(3) \leftarrow g(3) = \frac{2 \times 3 - 3}{3 - 2} = 3$$

$f^{-1}(3)=k$ 라 하면 $f(k)=3$ 이므로

$$\sqrt{3k-5}+1=3, \quad \sqrt{3k-5}=2$$

$$3k-5=4 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(3)=f^{-1}(3)=3$$

답 3

1104 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a)=9$ 에서 $(f \circ f)^{-1}(a)=9$

$$\therefore (f \circ f)(9)=a$$

이때 $f(9)=-\sqrt{9}+1=-2$, $f(-2)=\sqrt{1-(-2)}=\sqrt{3}$ 이므로

$$a=(f \circ f)(9)=f(f(9))=f(-2)=\sqrt{3}$$

답 3

다른 풀이 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a)=9$ 에서

$$f^{-1}(f^{-1}(a))=9$$

즉 $f^{-1}(a)=f(9)=-\sqrt{9}+1=-2$ 이므로

$$a=f(-2)=\sqrt{1-(-2)}=\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 1105 \quad y &= \frac{ax+b}{cx+1} = \frac{\frac{a}{c}(cx+1) - \frac{a}{c} + b}{cx+1} \\ &= \frac{-\frac{a}{c} + b}{cx+1} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{1}{c}, \quad y = \frac{a}{c}$$

주어진 그래프에서 $-\frac{1}{c} > 0$, $\frac{a}{c} > 0$ 이므로

$$a < 0, \quad c < 0$$

또 주어진 그래프가 x 축과 만나는 점의 y 좌표가 양수이므로

$$b > 0$$

$$y = \sqrt{ax+b} - c = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} - c$$

이므로 $y = \sqrt{ax+b} - c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-c$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a < 0$, $-\frac{b}{a} > 0$, $-c > 0$ 이므로 $y = \sqrt{ax+b} - c$ 의 그래프의 개형은 ②이다.

답 ②

$$1106 \quad y = \sqrt{ax+b} + c = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$$

이므로 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다.

주어진 그래프에서 $a > 0$, $-\frac{b}{a} > 0$, $c < 0$ 이므로

$$a > 0, \quad b < 0, \quad c < 0$$

$$y = \frac{abx}{x+c} = \frac{ab(x+c) - abc}{x+c} = \frac{-abc}{x+c} + ab$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

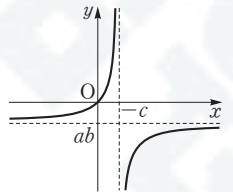
$$x = -c, \quad y = ab$$

이때 $-abc < 0$, $-c > 0$, $ab < 0$ 이고

$x=0$ 일 때 $y=0$ 이므로 함수 $y = \frac{abx}{x+c}$

의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y = \frac{abx}{x+c}$ 의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



답 ②

$$1107 \quad y = \sqrt{1-x} = \sqrt{-(x-1)}$$

이므로 $y = \sqrt{1-x}$ 의 그래프는

$y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선

$y = -x + k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절

편이 k 이다.

(i) 직선 $y = -x + k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -1 + k \quad \therefore k = 1$$

(ii) $y = \sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 접할 때

$\sqrt{1-x} = -x + k$ 의 양변을 제곱하면

$$1-x = x^2 - 2kx + k^2$$

$$\therefore x^2 - (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2k-1)\}^2 - 4(k^2-1) = 0$$

$$-4k + 5 = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

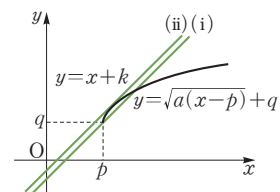
(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$1 \leq k < \frac{5}{4}$$

$$\text{답 } 1 \leq k < \frac{5}{4}$$

RPM 비법 노트

무리함수 $y = \sqrt{a(x-p)} + q$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 의 위치 관계는 다음과 같다.



① 직선 $y = x + k$ 가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있는 경우

⇒ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② 직선 $y = x + k$ 가 (ii)이거나 (i)의 아래쪽에 있는 경우

⇒ 한 점에서 만난다.

③ 직선 $y = x + k$ 가 (ii)의 위쪽에 있는 경우

⇒ 만나지 않는다.

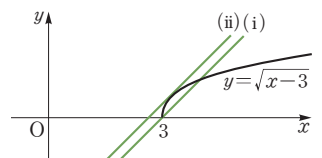
$$1108 \quad y = \sqrt{x-3}$$

는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 3만큼 평행이동한 것

이고, 직선 $y = x + a$ 는 기울기

가 1이고 y 절편이 a 이다.



(i) 직선 $y=x+a$ 가 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$0=3+a \quad \therefore a=-3$$

(ii) $y=\sqrt{x-3}$ 의 그래프와 직선 $y=x+a$ 가 접할 때

$\sqrt{x-3}=x+a$ 의 양변을 제곱하면

$$x-3=x^2+2ax+a^2$$

$$\therefore x^2+(2a-1)x+a^2+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2a-1)^2-4(a^2+3)=0$$

$$-4a-11=0 \quad \therefore a=-\frac{11}{4}$$

(i), (ii)에서 한 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는

$$a < -3 \text{ 또는 } a = -\frac{11}{4}$$

따라서 한 점에서 만나도록 하는 a 의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

참고! ⑤ $a = -\frac{5}{2}$ 이면 만나지 않는다. momo2000@hanmail.net

1109 $y=\sqrt{3-2x}=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

이므로 $y=\sqrt{3-2x}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 이다.

이때 $n(A \cap B)=0$ 이므로 $y=\sqrt{3-2x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$ 가 만나지 않아야 한다.

$y=\sqrt{3-2x}$ 의 그래프와 직선

$y=-x+k$ 가 접할 때,

$\sqrt{3-2x}=-x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$3-2x=x^2-2kx+k^2$$

$$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

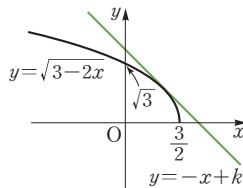
$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-3)=0$$

$$-2k+4=0 \quad \therefore k=2$$

따라서 구하는 k 의 값의 범위는

$$k > 2$$

답 $k > 2$



1110 $y=\sqrt{-x+2}$
 $=\sqrt{-(x-2)}$

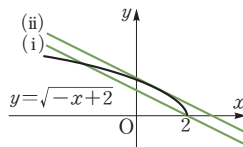
이므로 $y=\sqrt{-x+2}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선

$y=-\frac{1}{2}x+k$ 는 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 y 절편이 k 이다.

(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0=-1+k \quad \therefore k=1$$



(ii) $y=\sqrt{-x+2}$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{-x+2}=-\frac{1}{2}x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$-x+2=\frac{1}{4}x^2-kx+k^2$$

$$\therefore x^2-4(k-1)x+4k^2-8=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-2(k-1)\}^2-(4k^2-8)=0$$

$$-8k+12=0 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서

$$f(k)=\begin{cases} 0 & (k > \frac{3}{2}) \\ 1 & (k < 1 \text{ 또는 } k = \frac{3}{2}) \\ 2 & (1 \leq k < \frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)=1+2+1+0=4$$

답 4

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 163~165쪽

1111 $6-x \geq 0$ 이므로 $x \leq 6$ ㉠

$x^2-x-2 \geq 0$ 이므로 $(x+1)(x-2) \geq 0$

$\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ ㉡

$x+3 > 0$ 이므로 $x > -3$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-3 < x \leq -1$ 또는 $2 \leq x \leq 6$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 7개이다. 답 ③

1112 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{1}{\sqrt{kx^2+kx+1}}$ 의 값이 실수가 되려면 $kx^2+kx+1 > 0$ 이어야 한다.

(i) $k=0$ 일 때

$0 \times x^2 + 0 \times x + 1 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때

$k > 0$ ㉠

이어야 하고 이차방정식 $kx^2+kx+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4 \times k \times 1 < 0$$

$$k^2-4k < 0, \quad k(k-4) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 4$$
 ㉡

㉠, ㉡에서 $0 < k < 4$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$0 \leq k < 4$$

답 $0 \leq k < 4$

$$\begin{aligned}
 1113 \quad & \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}} + \frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+9}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+3})} \\
 &+ \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6})} \\
 &+ \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9}}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+9})(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9})} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{x-(x+3)} + \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}}{x+3-(x+6)} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9}}{x+6-(x+9)} \\
 &= -\frac{1}{3}(\sqrt{x}-\sqrt{x+3}) - \frac{1}{3}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}) \\
 &\quad - \frac{1}{3}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9}) \\
 &= -\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+9}}{3} \\
 &= \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 1114 \quad & \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \\
 &= \frac{1+x - (1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2$$

답 2

1115 $y = -\sqrt{x-k} + 1$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned}
 -y &= -\sqrt{-x-k} + 1 \\
 \therefore y &= \sqrt{-x-k} - 1
 \end{aligned}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-(x+1)-k} - 1 = \sqrt{-x-1-k} - 1$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
 0 &= \sqrt{-x-1-k} - 1 \\
 1 &= \sqrt{-x-1-k}, \quad 1 = -x-1-k \\
 \therefore x &= -k-2
 \end{aligned}$$

따라서 그래프의 x 절편이 $-k-2$ 이므로

$$-k-2 > 0 \quad \therefore k < -2$$

답 $k < -2$

$$1116 \quad y = \sqrt{2x-4} = \sqrt{2(x-4)} + 4$$

이므로 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x+4}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \sqrt{2x+4}$,

$y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 직선

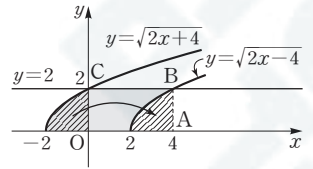
$y=2$ 는 오른쪽 그림과 같고,

빗금 친 두 부분의 넓이는 서로

같다.

즉 구하는 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같으므로

$$4 \times 2 = 8$$



답 8

1117 $y = \frac{6}{x-5} + 3$ 의 그래프는 $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

또 $y = \sqrt{x-k}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

$y = \frac{6}{x-5} + 3$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{6}{x-5} + 3 \quad \therefore x = 3$$

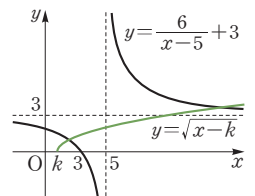
따라서 곡선 $y = \frac{6}{x-5} + 3$ 의 x 절편

은 3 이고, 두 곡선 $y = \frac{6}{x-5} + 3$,

$y = \sqrt{x-k}$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$k \leq 3$$

즉 k 의 최댓값은 3 이다.



답 ①

$$1118 \quad y = \sqrt{2x-2a} - a^2 + 4 = \sqrt{2(x-a)} - a^2 + 4$$

이므로 $y = \sqrt{2x-2a} - a^2 + 4$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-a^2 + 4$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \sqrt{2x-2a} - a^2 + 4$

$(x > a)$ 의 그래프가 오직 하나의

사분면을 지나려면 오른쪽 그림

과 같이 제1사분면만 지나야 하

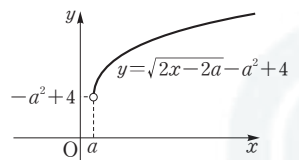
므로

$$a \geq 0, \quad -a^2 + 4 \geq 0$$

$$-a^2 + 4 \geq 0 \text{에서} \quad (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2 \quad (\because a \geq 0)$$

따라서 a 의 최댓값은 2 이다.



답 ①

$$1119 \quad ① \quad 9-3x \geq 0 \text{에서} \quad x \leq 3$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x | x \leq 3\}$ 이다.

$$\text{또 } \sqrt{9-3x} \geq 0 \text{에서} \quad \sqrt{9-3x} - 1 \geq -1$$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y | y \geq -1\}$ 이다.

$$② \quad y = \sqrt{9-3x} - 1 \text{에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$y = \sqrt{9} - 1 = 2$$

즉 $y = \sqrt{9-3x} - 1$ 의 그래프는 점 $(0, 2)$ 를 지난다.

$$\textcircled{3} y = \sqrt{9-3x} - 1 = \sqrt{-3(x-3)} - 1$$

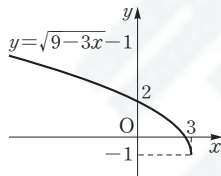
이므로 $y = \sqrt{9-3x} - 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y = \sqrt{9-3x} - 1$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{3x+9} - 1$$

따라서 $y = \sqrt{9-3x} - 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{3x+9} - 1$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $y = \sqrt{9-3x} - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지난다.



따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

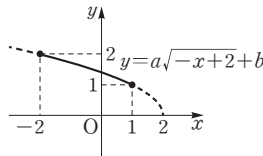
답 ④

$$\textbf{1120} \quad y = a\sqrt{-x+2} + b = a\sqrt{-(x-2)} + b$$

이므로 $y = a\sqrt{-x+2} + b$ 의 그래프는 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a > 0$ 이므로 $-2 \leq x \leq 1$ 에서

$y = a\sqrt{-x+2} + b$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 2, $x = 1$ 일 때 최솟값 1을 가지므로

$$2a + b = 2, \quad a + b = 1$$

$$\therefore a = 1, b = 0 \quad \therefore b - a = -1$$

답 -1

$$\textbf{1121} \quad f(1) = 5 \text{이므로} \quad 5 = \sqrt{a+b}$$

$$\therefore a + b = 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

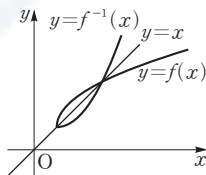
$$g(2) = 4 \text{에서 } f(4) = 2 \text{이므로} \quad 2 = \sqrt{4a+b}$$

$$\therefore 4a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = -7, b = 32$$

$$\therefore b - a = 39 \quad \text{답 39}$$

1122 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{2x-2} + 1 = x \text{에서} \quad \sqrt{2x-2} = x - 1$$

$$\text{양변을 제곱하면} \quad 2x - 2 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 두 교점의 좌표는 (1, 1), (3, 3)이므로

$$PQ = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

$$\textbf{1123} \quad (g \circ f^{-1})^{-1}(3) = (f \circ g^{-1})(3) = f(g^{-1}(3))$$

$$g^{-1}(3) = a \text{라 하면 } g(a) = 3 \text{이므로}$$

$$\sqrt{2a-1} = 3, \quad 2a-1=9 \quad \therefore a=5$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})^{-1}(3) = f(g^{-1}(3)) = f(5)$$

$$= \frac{5+1}{5-1} = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

$$\textbf{1124} \quad y = \frac{a}{x+b} + c \text{의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$$x = -b, y = c$$

주어진 그래프에서 $a > 0, -b < 0, c > 0$ 이므로

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

$$y = \sqrt{ax+b} + c = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$$

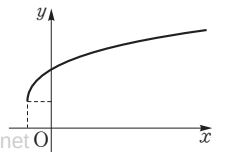
이므로 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a > 0, -\frac{b}{a} < 0, c > 0$ 이므로 함수

$y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프는

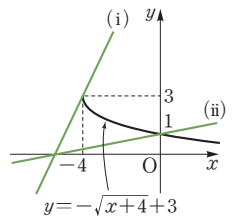
제1, 2사분면을 지난다.



답 ①

$$\textbf{1125} \quad y = -\sqrt{x+4} + 3 \text{의 그래프는}$$

$y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = mx + 6m$, 즉 $y = m(x+6)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-6, 0)$ 을 지난다.



(i) 직선 $y = mx + 6m$ 이 점 $(-4, 3)$ 을 지날 때

$$3 = -4m + 6m \quad \therefore m = \frac{3}{2}$$

(ii) 직선 $y = mx + 6m$ 이 점 $(0, 1)$ 을 지날 때

$$1 = 6m \quad \therefore m = \frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$\frac{1}{6} < m \leq \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{6} < m \leq \frac{3}{2}$$

$$\textbf{1126} \quad y = \frac{-2x+1}{x-3} = \frac{-2(x-3)-5}{x-3} = -\frac{5}{x-3} - 2$$

이므로 $y = \frac{-2x+1}{x-3}$ 의 그래프는 $y = -\frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore a = -5, b = 3, c = -2$$

... 1단계

따라서 함수 $y = -\sqrt{-5x+3} - 2$ 의 정의역은 $\{x \mid x \leq \frac{3}{5}\}$, 치역은 $\{y \mid y \leq -2\}$ 이다.

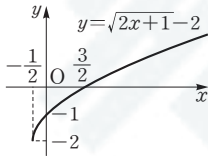
... 2단계

$$\text{답 정의역: } \{x \mid x \leq \frac{3}{5}\}, \text{치역: } \{y \mid y \leq -2\}$$

채점 요소	비율
1단계 a, b, c 의 값 구하기	50 %
2단계 함수 $y = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 정의역과 치역 구하기	50 %

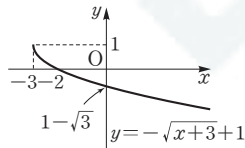
1127 $y = \sqrt{2x+1} - 2 = \sqrt{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} - 2$

이므로 $y = \sqrt{2x+1} - 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.
즉 $y = \sqrt{2x+1} - 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4 사분면을 지난다. ... 1단계



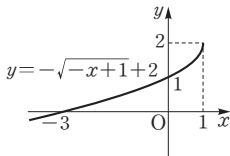
$y = -\sqrt{x+3} + 1$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

즉 $y = -\sqrt{x+3} + 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다. ... 2단계



$y = -\sqrt{-x+1} + 2 = -\sqrt{-(x-1)} + 2$

이므로 $y = -\sqrt{-x+1} + 2$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.
즉 $y = -\sqrt{-x+1} + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다. ... 3단계



따라서 세 함수의 그래프가 모두 지나가는 사분면은 제3사분면이다. ... 4단계

답 제3사분면

채점 요소	비율
1단계 $y = \sqrt{2x+1} - 2$ 의 그래프가 지나가는 사분면 구하기	30 %
2단계 $y = -\sqrt{x+3} + 1$ 의 그래프가 지나가는 사분면 구하기	30 %
3단계 $y = -\sqrt{-x+1} + 2$ 의 그래프가 지나가는 사분면 구하기	30 %
4단계 세 함수의 그래프가 모두 지나가는 사분면 구하기	10 %

1128 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y = -\sqrt{a(x+3)} + 2$ ①

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$-1 = -\sqrt{3a} + 2, \quad \sqrt{3a} = 3, \quad 3a = 9$

$\therefore a = 3$

... 1단계

$a = 3$ 을 ①에 대입하면

$y = -\sqrt{3(x+3)} + 2 = -\sqrt{3x+9} + 2$

따라서 $b = 9, c = 2$ 이므로

$a + b + c = 14$

... 2단계

... 3단계

답 14

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	60 %
2단계 b, c 의 값 구하기	30 %
3단계 $a + b + c$ 의 값 구하기	10 %

1129 $y = 3\sqrt{x-2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = 3\sqrt{x-a-2}$

$\therefore f(x) = 3\sqrt{x-a-2}$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함

수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선

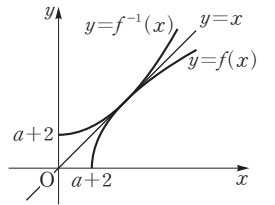
$y = x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽

그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프와

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 도

접한다.



... 1단계

... 2단계

$3\sqrt{x-a-2} = x$ 의 양변을 제곱하면

$9(x-a-2) = x^2$

$\therefore x^2 - 9x + 9a + 18 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D = (-9)^2 - 4(9a + 18) = 0$

$-36a + 9 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$

... 3단계

답 1/4

채점 요소	비율
1단계 평행이동한 그래프의 식 구하기	20 %
2단계 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접함을 알기	30 %
3단계 a 의 값 구하기	50 %

1130 **전략** 주어진 조건을 이용하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y = \alpha, y = \beta$ 의 위치 관계를 파악한다.

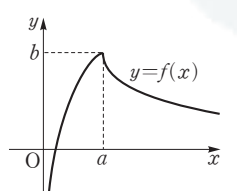
$y = -\sqrt{x-a} + b$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$

의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y

축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽

그림과 같다.



한편 방정식 $\{f(x) - \alpha\}\{f(x) - \beta\} = 0$ 에서

$f(x) = \alpha$ 또는 $f(x) = \beta$

..... ①

이때 조건 (가)에서 ①을 만족시키는 실수 x 의 값은 α, β, γ 뿐이고

조건 (나)에서 $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$ 이므로 $\alpha < \beta$ 라 하면

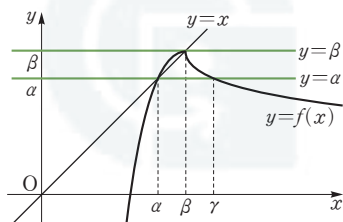
$f(x) = \alpha$ 의 실근은 $\alpha, \gamma,$

$f(x) = \beta$ 의 실근은 β

이어야 한다.

즉 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 두 점 (α, α) , (γ, α) 에서 만나고, $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\beta$ 는 한 점 (β, β) 에서 만난다.

따라서 다음 그림과 같이 점 (a, b) 는 점 (β, β) 와 일치해야 한다.



$$\therefore f(x) = \begin{cases} -(x-\beta)^2 + \beta & (x \leq \beta) \\ -\sqrt{x-\beta} + \beta & (x > \beta) \end{cases}$$

이때 α 는 $x < \beta$ 에서 함수 $y=-(x-\beta)^2 + \beta$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표이므로 $-(x-\beta)^2 + \beta = x$ 에서

$$(x-\beta)^2 + x - \beta = 0, \quad (x-\beta+1)(x-\beta) = 0$$

$$\therefore x = \beta - 1 \text{ 또는 } x = \beta$$

$$\therefore \alpha = \beta - 1$$

또 점 (γ, α) , 즉 $(\gamma, \beta-1)$ 은 함수 $y=-\sqrt{x-\beta} + \beta$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\beta - 1 = -\sqrt{\gamma - \beta} + \beta, \quad \sqrt{\gamma - \beta} = 1$$

$$\gamma - \beta = 1 \quad \therefore \gamma = \beta + 1$$

이때 $\alpha + \beta + \gamma = 15$ 이므로

$$(\beta - 1) + \beta + (\beta + 1) = 15, \quad 3\beta = 15 \quad \therefore \beta = 5$$

따라서 $\alpha = \beta - 1 = 4$ 이고 $f(x) = \begin{cases} -(x-5)^2 + 5 & (x \leq 5) \\ -\sqrt{x-5} + 5 & (x > 5) \end{cases}$ 이

므로

$$f(\alpha + \beta) = f(4 + 5) = f(9)$$

$$= -\sqrt{9-5} + 5 = 3$$

답 ③

1131 [전략] 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$y = \frac{x+4}{x-3} = \frac{(x-3)+7}{x-3} = \frac{7}{x-3} + 1$$

이므로 $y = \frac{x+4}{x-3}$ 의 그래프는 $y = \frac{7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 f 의 치역이 $\{y | y > 1\}$ 이고, 함수 f 는 일대일함수이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(4, 8)$ 을 지나야 한다.

$$\text{즉 } 8 = \sqrt{4-4} + k \text{ 이므로 } k = 8$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} + 8 & (x \leq 4) \\ \frac{x+4}{x-3} & (x > 4) \end{cases}$$

따라서 $f(0) = \sqrt{4} + 8 = 10$ 이므로 $f(p)f(0) = 20$ 에서

$$10f(p) = 20$$

$$\therefore f(p) = 2$$

$f(p) = 2$ 일 때 $p > 4$ 이므로

$$\frac{p+4}{p-3} = 2, \quad p+4 = 2p-6$$

$$\therefore p = 10$$

답 10

1132 [전략] $x \geq 0$ 인 경우와 $x < 0$ 인 경우로 나누어 $y = \sqrt{x+|x|}$ 의 그래프를 그린다.

$$y = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(i) 직선 $y=x+k$ 가 원점을 지날 때

$$k = 0$$

(ii) $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할 때

$$\sqrt{2x} = x+k \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$2x = x^2 + 2kx + k^2$$

$$\therefore x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = 0$$

$$-2k+1=0 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } 0 < k < \frac{1}{2}$$

